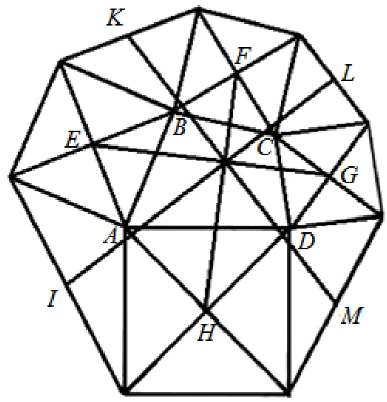
Јенс Карстенсен, Данска

Алија Муминагиќ, Данска

# ФИНСЛЕР-ХАДВИГЕРОВ КВАДРАТ

Во оваа статија ќе дадеме решение на една интересна задача за квадратите конструирани однадвор над страните на конвексен четириаголник. Тоа е следнава задача.

**Задача 1.** Над страните на конвексниот четириаголник $ABCD$, надвор од него, се конструирани квадрати, чии центри се точките $E,F,G,H$ (цртеж десно).

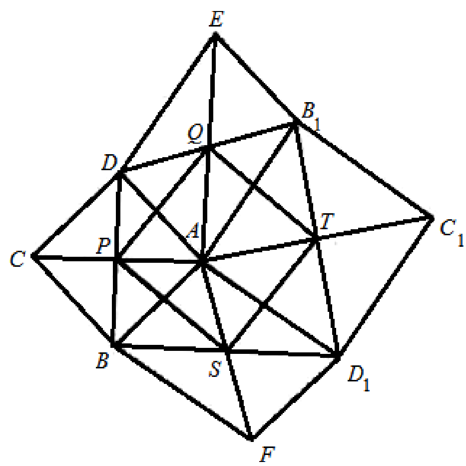



Докажи дека $\overline{EG}=\overline{FH}$ и $EG\perp FH$.

Ги поврзуваме со отсечки надворешните темиња на квадратите (цртеж десно) и средините на овие отсечки да ги означиме со $I,K,L,M$. Докажи дека $\overline{IL}=\overline{KM}=\overline{EG}\sqrt{2}$.

Пред да преминеме на решавање на заадачата ќе решиме две помошни задачи.

**Задача 2.** Нека се дадени два квадрати $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$, соодветно со центри $P$ и $T$ (цртеж 2). Ако точките $Q$ и $S$ се средини на отсечките $DB_1$ и $BD_1$, тогаш четириаголникот $QPST$ е квадрат.




**Решение.** Да го дополниме триаголникот $ADB_1$ до паралелограм $ADEB_1$ (отсечката $AQ$ ја продолжуваме преку $Q$ и на продолжението конструираме точка $E$ таква што $\overline{QE}=\overline{QA}$. Го ротираме паралелограмот $ADEB_1$ околу точката $P$ за агол $90^\circ$, во насока на движењето на стрелките на часовникот. Така паралелограмот $ADEB_1$ се пресликува во складен паралелограм $BAD_1F$. Но ротацијата ги запазува аглите и растојанијата, па затоа важи $\overline{PQ}=\overline{PS}$ и $PQ\perp PS$. Слично докажуваме дека $\overline{TQ}=\overline{TS}$ и $TQ\perp TS$. Според тоа, четириаголникот $QPST$ е квадрат.

Квадратот $QPST$ се нарекува *Финслер-Хадвигеров квадрат* за квадратите $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$.

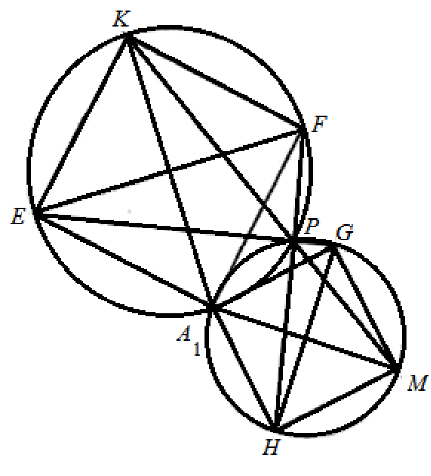
**Задача 3.** Дадени се квадратите $A_1EKF$ и $A_1GMH$. Докажи дека:

а) $\overline{EG}=\overline{FH}$ и $EG\perp FH$,

б) ако $P$ е пресечната точка на отсечките $EG$ и $FH$, тогаш отсечката $KM$ ја содржи точката $P$ и го полови аголот меѓу $EG$ и $FH$, и

в) $A_1P\perp KM$.

**Решение.** а) Со ротација во насока на движењето на стрелките на часовникот околу точката $A_1$ за агол $90^\circ$, триаголникот $A_1GE$ се пресликува во триаголникот $A_1HF$, па затоа важи $\overline{EG}=\overline{FH}$ и $EG\perp FH$.

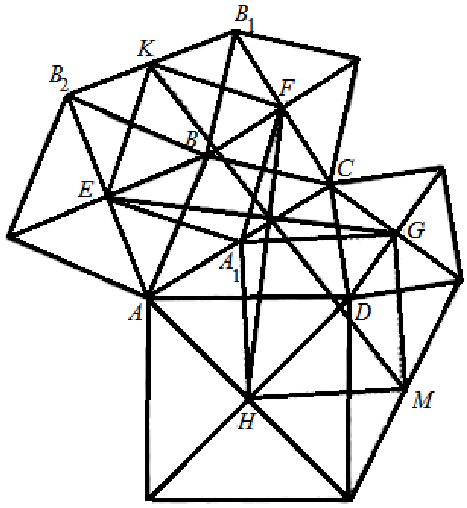



б) Од $EG\perp FH$ следува дека точката $P$ е втората пресечна точка на кружниците опишани околу двата квадрати (Зошто?). Да ја поврземе точката $P$ со точките $K$ и $M$. Тогаш $\measuredangle MPG=45^\circ$ и $\measuredangle KPE=45^\circ$, од што следува дека точките $K,P,M$ се колинеарни (Објасни!).

в) Од $\measuredangle A_1PK=90^\circ$, следува $A_1P\perp KM$.

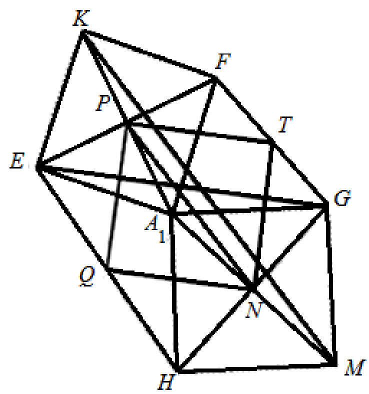
Сега може да се вратиме на решавањена почќетната задача.

**Решение на задача 1.** а) Во четириаголникот $ABCD$ ја повлекуваме дијагоналата $AC$ (цртеж десно). Го конструираме Финслер-Хадвигеровиот квадрат за квадратите над страните $AB$ и $BC$. Темињата на тој квадрат се: $K$ - средината на отсечката $B_1B_2$, $E$ - центарот на квадратот над страната $AB$, $A_1$ - средината на отсечката $AC$ и $F$ центарот на квадратот над страната $BC$. Слично го конструираме Финслер-Хадвигеровиот квадрат за квадратите над страните $CD$ и $DA$ и тоа е квадратот $MGA_1H$. За квадратите $KEA_1F$ и $MGA_1H$, од задача 3 следува $\overline{EG} = \overline{FH}$ и $EG \perp FH$.




б) Да ги нацртаме Финслер-Хадвигеровите квадрати $KEA_1F$ и $MGA_1H$ (цртеж десно). Понатаму, за овие два квадрати да го конструираме Финслер-Хадвигеровиот квадрат $PMNQ$. Во триаголникот $EGF$ точките $T$ и $P$ се по конструкција средини на страните $GF$ и $FE$. Тоа значи дека $PT$ е средна линија за триаголникот $EGF$, па затоа

$$PT \parallel EG \text{ и } \overline{PT} = \tfrac{1}{2}\overline{EG}. \qquad (1)$$




Во триаголникот $KA_1M$ точките $P$ и $N$ се средини на страните $KA_1$ и $A_1M$, па затоа

$$PN \parallel KM \text{ и } \overline{PN} = \tfrac{1}{2}\overline{KM}. \qquad (2)$$

Но, $PN$ е дијагонала на квадратот чија страна е $PT$, па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{PN} = \overline{PT}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\overline{EG}\sqrt{2}$$

и од (2) следува

$$\tfrac{1}{2}\overline{KM} = \overline{PN} = \tfrac{1}{2}\overline{EG}\sqrt{2},$$

т.е.

$$\overline{KM} = \overline{EG}\sqrt{2}.$$

На читателот мну препуштаме да докаже дека $\overline{IL} = \overline{KM}$, при што треба да ги конструира Финслер-Хадвигеровите квадрати за квадратите над страните $BC$ и $CD$, односно $DA$ и $AB$.

*Забелешка.* Од претходните разгледувања следува дека задачата може да се прошири со тоа што ќе побараме да се докаже и тврдењето:

*Докажи дека правите* $EG, FE, KM, IL$ *минуваат низ иста точка.*

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија