

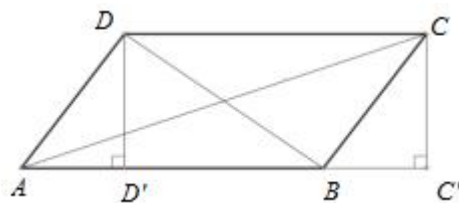
Ристо Малчески
Скопје

РАВЕНСТВО НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

На часовите по математика се запозна со паралелограмот и некои негови својства. Во следните разгледувања ќе го докажеме таканареченото равенство на паралелограм и ќе разгледаме неколку примени на истото.

Теорема 1 (равенство на паралелограм). Збирот на квадратите на должините на дијагоналите на паралелограмот е еднаков на двократниот збир на квадратите на должините на неговите две соседни страни.

Доказ. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека C' и D' се подножните точки на висините повлечени кон страната AB соодветно од темињата C и D (цртеж десно). Од Питагоровата теорема, применета на триаголниците $AC'C$, $BD'D$ и $BC'C$ следува



$$\overline{AC}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{C'C}^2 = (\overline{AB} + \overline{BC'})^2 + \overline{C'C}^2, \quad (1)$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BD'}^2 + \overline{D'D}^2 = (\overline{AB} - \overline{AD'})^2 + \overline{DD'}^2, \quad (2)$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BC'}^2 + \overline{C'C}^2. \quad (3)$$

Ако ги собереме равенствата (1) и (2), добиваме

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 &= (\overline{AB} + \overline{BC'})^2 + \overline{C'C}^2 + (\overline{AB} - \overline{AD'})^2 + \overline{DD'}^2 \\ &= \overline{AB}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{BC'} + \overline{BC'}^2 + \overline{C'C}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AD'} + \overline{AD'}^2 + \overline{DD'}^2. \end{aligned}$$

Понатаму, ако земеме предвид дека $\overline{DD'} = \overline{CC'}$ и $\overline{AD'} = \overline{BC'}$, од последното равенство следува

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC'}^2 + \overline{C'C}^2). \quad (4)$$

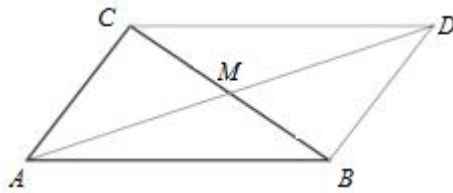
Конечно, ако од равенството (3) земиме во равенството (4), добиваме

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2), \quad (5)$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 1. Изрази ги должините на тежишните линии t_a, t_b, t_c на триаголникот ABC , со помош на должините на страните a, b, c .

Решение. Нека M е средината на страната BC на триаголникот ABC и D е симетричната точка на темето A во однос на точката M . Бидејќи M е средината на страната BC , добиваме $\overline{BM} = \overline{MC}$ и како $\overline{AM} = \overline{MD}$, заклучуваме дека четириаголникот $ABDC$ е паралелограм. Сега, од теорема 1 следува



$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$$

и како $\overline{AD} = 2t_a$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ и $\overline{CB} = b$, со замена во последното равенство добиваме

$$(2t_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2),$$

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

На сличен начин добиваме дека

$$t_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} \text{ и } t_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4},$$

односно

$$t_b = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \text{ и } t_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}. \blacksquare$$

Забелешка 1. Од решението на задача 1 непосредно следува равенството

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (6)$$

Задача 2. Разликата на збирот на квадратите на растојанијата од произволна точка M од внатрешноста на паралелограмот до две спротивни темиња на тој паралелограм и збирот на квадратите на растојанијата од точката M до другите две спротивни темиња на тој паралелограм е константна. Докажи!

Решение. Нека е даден паралелеграмот M и нека M е негова произволна внатрешна точка. Нека M' е симетричната точка на точката M во однос на пресекот O на дијагоналите на паралелограмот. Тогаш четириаголникот $AMCM'$ е паралелограм и од теорема 1 следува

$$\overline{AC}^2 + \overline{MM'}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2),$$

па како

$$\overline{AC} = 2\overline{AO} \text{ и } \overline{MM'} = 2\overline{MO},$$

од последното равенство следува

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{MM'}^2}{2} = \frac{4\overline{AO}^2 + 4\overline{MO}^2}{2},$$

односно

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = 2(\overline{AO}^2 + \overline{MO}^2). \quad (7)$$

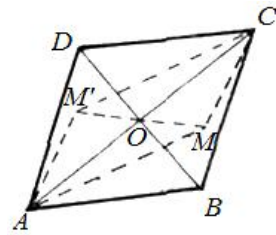
Аналогно добиваме

$$\overline{BM}^2 + \overline{MD}^2 = 2(\overline{BO}^2 + \overline{MO}^2). \quad (8)$$

Конечно, ако од равенството (7) го одземеме равенството (8), добиваме

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - (\overline{BM}^2 + \overline{MD}^2) = 2(\overline{AO}^2 - \overline{BO}^2) = \text{const},$$

што и требаше да се докаже. ■



Задача 3. Докажи, дека за тежишните линии t_a, t_b, t_c на триаголникот ABC и полупериметарот $s = \frac{a+b+c}{2}$ важи неравенството

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \geq s^2. \quad (9)$$

Решение. Ако го искористиме равенството (6) и равенството $s = \frac{a+b+c}{2}$, добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2,$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2,$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca,$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0,$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Конечно, последното неравенство е точно, што значи дека е точно неравенството (9). Притоа знак за равенство важи ако и само ако

$$a-b=b-c=c-a=0,$$

т.е. ако и само ако триаголникот $a=b=c$, што значи ако и само ако триаголникот ABC е рамностран. ■

Задача 4. Докажи, дека за тежишните линии t_a, t_b, t_c и страните a, b, c на триаголникот ABC важи неравенството

$$t_a + t_b + t_c \leq \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (10)$$

Решение. Ако го quadriраме неравенството (10) и го искористиме равенството (6), добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned} (t_a + t_b + t_c)^2 &\leq \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2), \\ (t_a + t_b + t_c)^2 &\leq \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2), \\ (t_a + t_b + t_c)^2 &\leq 3(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2). \end{aligned}$$

Последното неравенство се докажува на потполно ист начин како аналогното неравенство од задача 3, при што се добива дека знак за равенство важи ако и само ако $t_a = t_b = t_c$, т.е. ако и само ако триаголникот ABC е рамностран. ■

Задача 5. Даден е триаголник ABC со страни a, b, c , плоштина P , висина h_a и тежишна линија t_a повлечени од темето A . Докажи го неравенството

$$4Pt_a\sqrt{3} \leq (a^2 + b^2 + c^2)h_a. \quad (11)$$

Решение. Според задача 1 имаме $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ и како $h_a = \frac{2P}{a}$, ако замениме во неравенството (11), добиваме дека истото последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned} 4P\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} &\leq \frac{2P}{a}(a^2 + b^2 + c^2), \\ a\sqrt{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} &\leq a^2 + b^2 + c^2, \\ 6a^2b^2 + 6a^2c^2 - 3a^4 &\leq a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2, \\ b^4 + c^4 + 4a^4 + 2b^2c^2 - 4a^2b^2 - 4c^2a^2 &\geq 0, \\ (b^2 + c^2 - 2a^2)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Од точноста на последното неравенство следува точноста на неравенството (11), при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамностран (Зошто?). ■

Литература

1. Borislav Aničić: Jdna teorema o paralelogramu i dve njene primene, Matematički list, XIX, 3, 1984
2. Šefket Arslanagić: Jedan poučak o paralelogramu i njegova primjena, Matka, br. 104, 2017/2018
3. Глигор Тренчевски: Геометрија за VIII одделение, Просветно дело, 1978
4. Ристо Малчески: Математички талент 18 (збирка задачи за IX одделение – втор дел), Армаганка, 2020