

ММО 2008

1. Најди ги сите инјекции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ за кои важи

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Нека f е решение. Да забележиме дека важи

$$f(f(n)) \leq \max\{n, f(n)\}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (*).$$

Нека

$$f^k(a) = \underbrace{f(f(\dots f(a))\dots)}_k.$$

Да претпоставиме дека постои a таков што $a > f(a)$. Тогаш

$$f^2(a) \stackrel{(*)}{<} a$$

и со индукција по k лесно се покажува дека

$$f^k(a) < a, \forall k > 0. \quad (1)$$

Бидејќи множеството $\{1, 2, \dots, a-1\}$ е конечно, следува дека постојат i, j такви што $0 < i < j$ и $f^i(a) = f^j(a) = f^i(f^{j-i}(a))$. Пресликувањето f е инјекција, па затоа $f^{j-i}(a) = a$, што е во контрадикција со (1). Значи

$$a \leq f(a), \forall a > 0 \quad (2)$$

Тогаш

$$f(a) \leq f(f(a)), \forall a \in \mathbb{N}.$$

Од друга страна заради (*) и (2) имаме

$$f(f(a)) \leq \max\{a, f(a)\} = f(a)$$

т.е

$$f(f(a)) = f(a)$$

и конечно заради инјективноста на f , добиваме $f(a) = a, \forall a \in \mathbb{N}$. Значи

$$f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ се такви што, $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Докажи го неравенството

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &= a^3+b^3+c^3+24= \\ &= a^3+b^3+c^3+\underbrace{3+\dots+3}_8 \\ &\geq 9\sqrt[9]{(a^3+b^3+c^3)3^8}\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq 9\sqrt[9]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}},$$

т.е.

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

3. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ така што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Нека V е пресекот на симетралата на аголот кај темето A со страната BC и D е подножјето на висината од спуштена од темето A кон страната BC . Ако E и F се пресечните точки на опишаната кружница на $\triangle AVD$ со страните CA и AB соодветно, докажи дека AD , BE и CF се сечат во иста точка.

Решение. Имаме $\angle ADV = 90^\circ$ па затоа точките A, D, V, E, F лежат на иста кружница (над AV како дијаметар) и

$$\angle BFV = 180^\circ - \angle AFV = 90^\circ$$

(над дијаметар),

$$\angle CEV = 180^\circ - \angle AEV = 90^\circ$$

(над дијаметар). Значи, $\triangle BFV \sim \triangle BDA$ и $\triangle CEV \sim \triangle CDA$. Од каде добиваме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{VB}} \text{ и } \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{VC}} \quad (1)$$

Но

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{VC}} \text{ (од теорема за симетрала).} \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{VB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{VC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$$

т.е.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \quad (3)$$

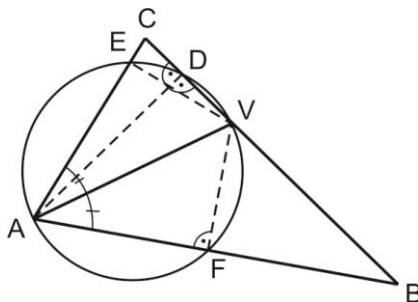
Исто така $\angle FAV = \angle VAE$ па следува

$$\overline{AE} = \overline{AF}. \quad (4)$$

Сега од (3) и (4) имаме

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = 1.$$

Конечно, од теоремата на Чева следува дека AD , BE и CF се сечат во иста точка.



4. За еден природен број $n > 1$ велиме дека е добар ако за произволни природни броеви $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ такви што $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \leq n-1$, важи: за секој $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ постои $I \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$ такво што $\sum_{k \in I} b_k \equiv i \pmod{n}$.

(Притоа празната сума по дефиниција е еднаква на нула, а сума од еден собирук по дефиниција е тој собирук.)

Најди ги сите добри броеви.

Решение. Ќе покажеме дека еден број е добар ако е прост. Најпрво да покажеме дека ако n е сложен број, тогаш n не е добар. Имено, нека $n = rs$, $1 < r, s < n$. Да избереме $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = r$. Тогаш

$$\{\sum_{i \in I} bi \pmod{n} / I \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}\} = \{0, r, 2r, \dots, n-r\},$$

па на пример за $i=1$ не постои соодветното подмножество I .

Ќе докажеме дека секој прост број е добар. Нека p е прост број. Важи нешто повеќе: за $1 \leq r \leq n-1$ и за произволни природни броеви $b_1, b_2, \dots, b_r$ такви што $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_r \leq p-1$ постојат барем $r+1$ различни броеви $\pmod{p}$ кои се добиваат како суми од елементите $b_1, b_2, \dots, b_r$.

Доказот на ова ќе го изведеме со индукција по r .

За $r=1$ тврдењето важи бидејќи празната сума е $\equiv 0 \pmod{p}$, а сумата од b_1 не е $\equiv 0 \pmod{p}$. Нека $r < n-1$ и тврдењето за r е исполнето. Да претпоставиме дека за $p+1$ тврдењето не важи. Нека $1 \leq b_1, b_2, \dots, b_r, b \leq p-1$ се такви да сумите од овие броеви не даваат барем $r+2$ различни броеви $\pmod{p}$. Бидејќи за r тврдењето важи, за броевите $b_1, b_2, \dots, b_r$ постојат суми $0 = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ попарно различни $\pmod{p}$. Тогаш мора да $\sigma_0 + b, \sigma_1 + b, \dots, \sigma_r + b$ не даваат нов број $\pmod{p}$ (различен од $0 = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$). Бидејќи $\sigma_i + b \not\equiv \sigma_i \pmod{p}$, мора да $0, b, 2b, \dots, (r+1)b \in \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r\}$. Но, тогаш постојат i, j такви што $0 \leq i < j \leq r+1$ и $ib \equiv jb \pmod{p}$, што повлекува дека $(j-i)b \equiv 0 \pmod{p}$. Последново противречи на фактот дека p е прост број. Значи претпоставката за $r+1$ не е точна. Со тоа тврдењето е докажано.