Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија

Проста 2011. година

Ратко Тошић, Нови Сад

Ова година је двоструко проста – у календарском смислу, јер има 365 дана (фебруар има 28 дана), а такође јер је број 2011 прост (нема других делитеља осим 2011 и 1). Сваке године, на такмичењима се појављују задаци у којима фигурише редни број те године. За предлагаче задатака посебан је изазов да саставе задатак у коме су или неки услов, или само решење, повезани са редним бројем године, нарочито ако је то прост број. Вероватно ни ова година неће представљати изузетак, па зато задаци из овог чланка могу да послуже као својеврсна припрема за такмичења.

ЗАДАЦИ

1. Сваку звездицу замени неком цифром тако да се добије тачан рачун:

$$* \times *** + * = 2011.$$

Решење. Треба уствари наћи сва решења једначине

$$a \times \overline{bcd} + e = 2011$$

где су a, b, c, d, e цифре и $\overline{bcd}$ декадни запис троцифреног броја. Како је $e \leq 9$, мора бити $2011 \geq a \times \overline{bcd} \geq = 2002$. Директном провером налазимо 13 решења:

$$3 \times 668 + 7 = 2011, 3 \times 669 + 4 = 2011, 3 \times 670 + 1 = 2011, 4 \times 501 + 7 = 2011,$$
$$4 \times 502 + 3 = 2011, 5 \times 401 + 6 = 2011, 5 \times 402 + 1 = 2011, 6 \times 334 + 7 = 2011,$$
$$6 \times 335 + 1 = 2011, 7 \times 286 + 9 = 2011, 7 \times 287 + 2 = 2011, 8 \times 251 + 3 = 2011,$$
$$9 \times 223 + 4 = 2011.$$

2. Заменити a, b, c, d, e цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да се добије тачна једнакост $a \times \overline{bcd} + e = 2011$.

Решење. Услов задовољава седам решења из претходног задатка:

$$3 \times 670 + 1 = 2011, 4 \times 501 + 7 = 2011, 4 \times 502 + 3 = 2011,$$

$5 \times 401 + 6 = 2011, 5 \times 402 + 1 = 2011, 7 \times 286 + 9 = 2011, 8 \times 251 + 3 = 2011.$

3. Колико најмање пута треба узастопно исписати број 2011 да би се добио број дељив са 99?

Решење. Нека је n тражени број и $A = 20112011 \ldots 2011$ број који се добије кад се 2011 испише n пута узастопно. Збир цифара броја A једнак је $4n$, а разлика збира цифара на парним и збира цифара на непарним местима је $3n - n = 2n$. Број A је дељив са 99 ако је дељив и са 9 и са 11. То ће у нашем случају бити ако је $4n$ дељив са 9 и $2n$ дељив са 11. То ће бити у случају када је n дељиво и са 9 и са 11. Дакле, n мора бити дељив и са 9 и са 11, а најмањи такав број је 99.

4. На колико начина се броју 2011 могу дописати три цифре тако да се добије број дељив са 2009?

Решење. На један начин. Дописивањем цифара 009 добијамо број

$$2011009 = 2009000 + 2009 = 1011 \cdot 2009.$$

5. Између сваке две цифре низа

$$9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

постави знак неке основне операције и по потреби распореди заграде тако да се добије израз чија је бројна вредност једнака 2011.

Решење. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (6 - 5) \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 1 = 2011.$

6. На три места у низу од десет двојки 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 уметни знаке рачунских операција тако да вредност добијеног израза буде 2011.

Решење. $2222 - 222 + 22 : 2 = 2011.$

7. На четири места у низу од шеснаест јединица 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 уметни знаке + или – тако да вредност добијеног израза буде 2011.

Решење. $1111 + 1111 - 111 - 111 + 11 = 2011.$

8. Прецртај десет цифара у низу

$$2011201120112011$$

тако да шестоцифрени број који се састоји од преосталих цифара буде:

а) највећи могући; б) најмањи могући.

Решење. а) 222211; б) 100011.

9. Доња једнакост је нетачна

$$\mathrm{MV} + \mathrm{XIX} = \mathrm{MMXI}$$

Премести два дрвцета тако да добијеш тачну једнакост.

Решење. MM + XI = MMXI

10. Које године је рођена особа која 2011. године има онолико година колики је збир цифара година његовог рођења?

Решење. 1991. године.

11. Број 2011 може се представити помоћу 11 јединица и помоћу 11 тројки на следећи начин:

$$(1111 - 111) \cdot (1 + 1) + 11 = 2011; \quad (333 \cdot 3 \cdot (3 + 3) + 3) : 3 + 3 \cdot 3 + 3 = 2011.$$

Представи број 2011 на сличан начин помоћу 11 једнаких цифара различитих од 1 и 3.

Решење. Ево неких представљања:

$$(2 \cdot (2222 - 222) + 22) : 2 = 2011; \quad (444 + 44 + 4) \cdot 4 + 44 - 4 : 4 = 2011;$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (5 + 5 + 5 + 5 : 5) + 55 : 5 = 2011; \quad 666 \cdot (6 + 6 + 6) : 6 + 6 + 6 + 6 : 6 = 2011;$$

$$(888 + 88 + 8) : 8 + 888 = 2011; \quad 999 + 999 + (99 + 9 + 9) : 9 = 2011.$$