Сојузен натпревар 1976

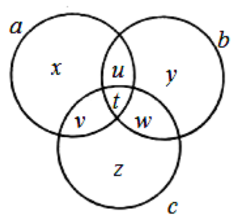
I година

1. Дадени се N објекти од кои N_a го имаат својството a, N_b својството b, N_c својството c, $N_{a,b}$ својствата a и b, $N_{a,c}$ својствата a и c и $N_{b,c}$ својствата b и c. Докажи дека

$$3N + N_{a,b} + N_{b,c} + N_{c,a} \geq 2N_a + 2N_b + 2N_c .$$

Решение. Со x, y, z редоследно да ги означиме бројот на објектите кои го имаат само својството a, b, c. Понатаму, нека u, v, w е редоследно бројот на објектите кои ги имаат исаклучиво својствата a и b, a и c, b и c, а со t бројот на објектите кои ги имаат сите три својства. Тогаш (види цртеж):

$$\begin{aligned}
N_a &= x+u+v+t,\\
N_b &= y+u+w+t,\\
N_c &= z+v+w+t,\\
N_{a,b} &= u+t,\\
N_{a,c} &= v+t,\\
N_{b,c} &= w+t,\\
N &= x+y+z+u+v+w+t.
\end{aligned}$$



Оттука следува неравенството

$$3N + N_{a,b} + N_{b,c} + N_{c,a} - 2N_a - 2N_b - 2N_c = x + y + z \geq 0,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 0$, т.е. ако и само ако ниту еден од објектите нема само едно својство.

2. Докажи дека во круг со радиус 9 не може да се сместат 400 точки така што растојанието меѓу секои две точки ќе биде поголемо од 1.

Решение. Нека претпоставиме дека во круг со радиус 9 може да се сместат 400 точки така што растојанието меѓу секои две точки е поголемо од 1. Околу секоја точка да опишеме круг со радиус $\frac{1}{2}$. Овие кругови се дисјунктни и сите се содржани во кругот со радиус 9,5. Но, тогаш вкупната плоштина на овие кругови, која е $400\pi(\frac{1}{2})^2 = 100\pi$, мора да е помала од плоштината на кругот со радиус 9,5 која е еднаква на $9,5^2\pi = 90,25\pi$, што не е точно. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

3. Докажи дека за три реални броја чиј производ е еднаков на 1 и чиј збир е строго поголем од збирот на нивните реципрочни вредности, важи:

Меѓу трите броја постои точно еден кој е поголем од 1.

Решение. Нека a,b,c се реални броеви такви што

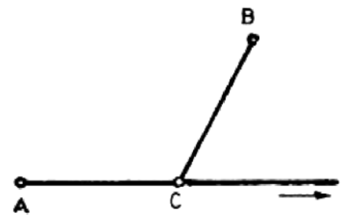
$$abc=1 \text{ и } a+b+c>\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}.$$

Тогаш

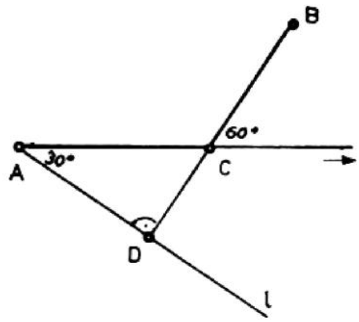
$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\\ &= a+b+c-abc(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})\\ &= a+b+c-(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})>0.\end{aligned}$$

Бидејќи не е можно сите три броја $a-1,b-1,c-1$ да се позитивни (имено од $a>1$, $b>1,c>1$ ќе следува $abc>1$, што е спротивно на претпоставките), добиваме дека точно еден од овие броеви е позитиве, т.е. точно еден од броевите a,b,c е поголем од 1, што и требаше да се докаже.

4. На брегот на реката се наоѓа местото A, а низводно од него, подалеку од брегот, се наоѓа местото B. Определи на кое место треба да се направи пристаниште C за да транспортот од A до B, преку C, биде најефтин, ако се знае дека цената на транспортот по реката е два пати помала отколку копнениот транспорт. Се претпоставува дека текот на реката и патот од C во B се праволиниски (цртеж десно).



Решение. Нека C е бараната точка. Нека l е полуправа со почеток во a од онаа страна на правата AC (реката) од која не е точката B, која со правата AC формира агол од 30° и нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката C на полуправата l (цртеж десно). Тогаш $AC=2CD$. Цената на транспортот на стоката е пропорционална со



$$AC+2CB=2CD+2CB=2(CD+CB),$$

што значи и со $CD+CB$, па ќе биде најмала ако точките B,C,D се колинеарни, односно ако правата CB формира со низводната насока на реката агол од 60°.

II година

1. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

Решение. Бидејќи за секој $n \in \mathbb{N}$ важи:

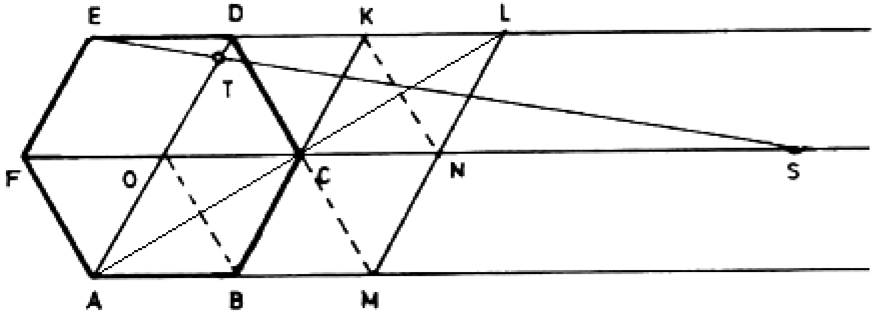
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

добиваме

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} = (\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \dots + (\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}})$$
$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

2. Даден е правилен шестаголник со должина на страна a. Користејќи се само со линијар конструирај отсечка со должина $\frac{a}{n}$, за $n = 2,3,4,\dots$.

Решение. Нека е даден правилен шестаголник $ABCDEF$ со страна a. Прво ги конструираме пресеците K и L на правата DE соодветно со правите BC и AC, потоа пресекот M на правите AB и CD и најпосле пресеците N и O на правата CF со правите ML и AD, соодветно (цртеж десно). Лесно се докажува дека шестаголникот $BMNKDO$ е правилен со страна a и дека $Fn = 3FO = 3a$. Продолжувајќи ја постапката можеме за даден природен број N на правата FO да определиме точка S таква што $FS = nFO = na$. Сега, ако T е пресекот на правите ES и OD, тогаш од сличноста на триаголниците FSE и OST следува дека $OT = \frac{n-1}{n} a$, односно $TD = \frac{1}{n} a$.



3. Даден е триаголник ABC со страни $a = BC, b = CA, c = AB$. Во внатрешноста на триаголникот определи точка P таква што вредноста на изразот $ax^2 + by^2 + cz^2$ ќе биде најмала, каде x, y, z се соодветно растојанијата од точката P до правите BC, CA, AB.

Решение. Со S да ја означиме плоштината на дадениот триаголник. Треба да определиме кога достигнува минимум изразот $L = ax^2 + by^2 + cz^2$, при услов да е $ax + by + cz = 2S$. Ќе докажеме дека важи

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{a+b+c} \geq (\frac{ax+by+cz}{a+b+c})^2, \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. Навистина, неравенството (1) еквивалентно со неравенството

$$(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)\geq(ax+by+cz)^2,$$

т.е. со неравенството

$$ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2\geq 0,$$

кое е точно, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

Докажаното неравенство можеме да го запишеме во видот $L\geq\frac{4S^2}{a+b+c}$. Според тоа, дадениот израз L има вредност која не е помала од $\frac{4S^2}{a+b+c}$, а е еднаква на овој број ако и само ако $x=y=z$, т.е. ако и само ако P е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC.

4. Определи го најголемиот број кој е делив со 11 и чии цифри се различни.

Решение. Ќе докажеме дека постојат десетцифрени броеви од видот $\overline{98765abcde}$ каде (a,b,c,d,e) е некоја пермутација на множеството $\{0,1,2,3,4\}$, кои се деливи со 11 и меѓу нив ќе го определиме најголемиот број. Тој број очигледно ќе биде и најголемиот десетцифрен број запишан со различни цифри кој е делив со 11.

За да број од наведениот вид е делив со 11, потребно и доволно е со 11 да е делив бројот

$$\begin{aligned}A&=9+7+5+b+d-(8+6+a+c+e)\\&=7+b+d-(10-(b+d))=2(b+d)-3.\end{aligned}$$

Од условот за b и d следува дека $1\leq b+d\leq 7$, односно дека $-1\leq A\leq 11$. Бидејќи A е непарен, единствена можност да е делив со 11 е $A=11$, односно $b+d=7$. Според тоа, (b,d) е некоја пермутација на множеството $\{3,4\}$, а (a,c,e) е некоја пермутација на множеството $\{0,1,2\}$. Најголемиот број од опишаниот вид кој ги задоволува последните услови е 9876524130.

III година

1. Ако $a>1, b>1, c>1$ или $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$ докажи дека важи неравенството

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Решение. Било да е

$$a>1, b>1, c>1 \text{ или } 0<a<1, 0<b<1, 0<c<1,$$

броевите $\log_b a, \log_c b, \log_a c$ ќе бидат позитивни.

Ако два пати го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}=2(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a})$$
$$\geq 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$
$$\geq\frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}$$
$$=\frac{9}{a+b+c},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

2. Ако α,β,γ се агли на нетапоаголен триаголник, докажи дека

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\,. \quad (1)$$

Решение. Бидејќи аглите на дадениот триаголник не се тапи, барем еден од нив, да кажеме γ го задоволува условот $\frac{\pi}{4}<\gamma\leq\frac{\pi}{2}$ и со самото тоа го задоволува неравенството $\sin\gamma>\cos\gamma$. Тогаш $\alpha+\beta\geq\frac{\pi}{2}$, $\frac{|\alpha-\beta|}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, $0\leq\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$, па затоа

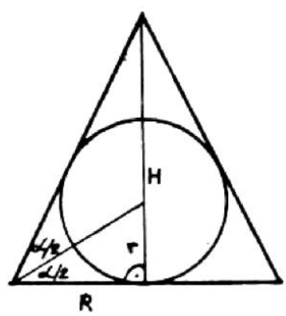
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=$$
$$=(\sin\alpha+\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)+(\sin\gamma-\cos\gamma)$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})+(\sin\gamma-\cos\gamma)$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4})+(\sin\gamma-\cos\gamma)>0,$$

бидејќи $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>0,\ \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4})>0,\ \sin\gamma-\cos\gamma>0$.

Според тоа, точно е неравенството (1).

3. Определи ја најголемата вредност на односот на волумените на топката и околу неа опишаниот конус.

Решение. Со r да го означиме тадиусот на топката, со R и H радиусот на основата и висината на конусот, соодветно, со α аголот на изводницата на конусот спрема рамнината на основата и $t=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, цртеж десно. Тогаш



$$H=R\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2Rt}{1-t^2},\ r=R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=Rt,$$

па затоа односнот на волуменот V на топката и волуменот V' на конусот е

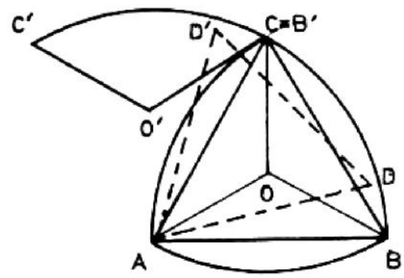
$$V:V'=\frac{4}{3}\pi r^3:\frac{1}{3}\pi R^2H=2t^2(1-t)^2\leq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

при што знак за равенство се достигнува ако и само ако $t^2=\frac{1}{2}$.

Конечно, бараната максимална вредност на односот на волумените е $\frac{1}{2}$ и се достигнува кога наклонетиот агол е $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Во рамнината е дадено множество S од n точки ($n>2$) со својство: ако $A,B\in S$, тогаш постои $C\in S$ таква што триаголникот ABC е рамностран. Колку може да биде бројот n?

Решение. Да избереме точки $A,B\in S$ такви што растојанието AB е најголемо можно. Нека точката $C\in S$ е таква што триаголникот ABC е рамностран. Ќе докажеме дека множеството S не може да содржи повеќе од три точки, т.е. дека мора да е $n=3$.



Конструираме кружници со центри A, B и C, и радиуси еднакви на отсечката AB, цртеж десно. Заради начинот на избор на точките A и B можните точки на множеството S, различни од A,B,C, не може да се надвор од било која од овие кружници. Ќе докажеме дека не може да се ниту во нивната заедничка внатрешна област, ниту на лаците AB, BC, CA на овие кружници. Доволно е да докажеме дека ги нема во делот од таа област ограничен со отсечките OB и OC (O е центарот на триаголникот ABC), и лакот BC - овој дел од рамнината да го означиме со $\mathbb{F}$. Да претпоставиме дека во областа $\mathbb{F}$ постои точка $D\in S$, различна од B и C. Тогаш за некој $D'\in S$ триаголникот ADD' е рамностран, т.е. точката D' се добива со ротација на точката D околу точката A за агол 60° (во некоја насока). При оваа ротација една од точките B и C преминува во другата, нека на пример B преминува во $C=B'$. Лесно се докажува дека притоа отсечката BO преминува во отсечка $B'O'$ која припаѓа на тангентата на кружницата (B,AB) во точката C. Оттука следува дека целата област $\mathbb{F}$ освен самата точка B се пресликува во делот од рамнината за кој докажавме дека во него нема точки од множеството S. Но, тоа значи дека $D'=B'$ и $D=B$, што не е можно. Добиената противречност докажува дека множеството S не содржи други точки освен точките A,B,C.

IV година

1. Нека во рамнината е даден правоаголен координатен систем и S е множеството од сите точки со целобројни координати. Докажи дека за секој природен број n постои кружница со центар $(\sqrt{2},\frac{1}{3})$ која во својата внатрешност содржи точно n точки од множеството S.

Решение. Прво ќе докажеме дека не постои кружница со центар во точката $C(\sqrt{2},\frac{1}{3})$ која содржи две точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) со целобројни координати. Навистина, ако за некои $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z}$ такви што $x_1\neq x_2$ или $y_1\neq y_2$ важи

$$(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\tfrac{1}{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\tfrac{1}{3})^2,$$

тогаш ќе важи

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-\sqrt{2})=(y_1-y_2)(y_1+y_2-\tfrac{2}{3}).$$

Но, во последното равенство за $x_1\neq x_2$ левата страна е ирационален број, а десната е рационален број. Ако $x_1=x_2$ и $y_1\neq y_2$, тогаш добиваме $y_1+y_2=\frac{2}{3}$, што не е можно.

Сега, сите точки на множеството S да ги подредиме во низа на следниов начин: со M_1 да ја означиме точката од S која е најблиску до точката C, па ако точките $M_1,M_2,...,M_n$ се веќе определени, со M_{n+1} да ја означиме точката од $S\setminus\{M_1,M_2,...,M_n\}$ која е најблиска до точката C. Претходно докажаното тврдење обезбедува дека опишаната конструкција е можна. Тогаш кружницата со центар во C и радиус R, каде $CM_n<R<CM_{n+1}$ во својата внатрешност содржи точно n точки од множеството S.

2. Затворени конвексни криви C_1',C_2' имаат периметри x_1,x_2, каде $x_1+x_2=d=\text{const}$ и се слични на кривите C_1,C_2 кои имаат периметри O_1,O_2 и ограничуваат површини со плоштини P_1,P_2, соодветно. Определи ги x_1,x_2 така што збирот на плоштините на површините кои ги ограничуваат кривите C_1',C_2' е минимален.

Решение. Ако k_1, односно k го означиме коефициентот на сличност на кривите C_1' и C_1, односно C_2' и C_2, тогаш $x_1=k_1O_1$ и $x_2=k_2O_2$. Нека P_1',P_2' се плоштините на областите кои соодветно се ограничени со кривите C_1',C_2'. Тогаш $P_1'=k_1^2P_1, P_2'=k_2^2P_2$, па затоа збирот

$$P_1'+P_2'=k_1^2P_1+k_2^2P_2=\frac{P_1}{O_1^2}x_1^2+\frac{P_2}{O_2^2}x_2^2=(\frac{P_1}{O_1^2}+\frac{P_2}{O_2^2})x_1^2-\frac{2dP_2}{O_2^2}x_1+\frac{d^2P_2}{O_2^2}$$

е минимален за

$$x_1=\frac{P_2O_1^2}{P_2O_1^2+P_1O_2^2}d,\quad x_2=\frac{P_1O_2^2}{P_2O_1^2+P_1O_2^2}d.$$

3. Дадени се множествата цели броеви

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n\},\quad B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$$

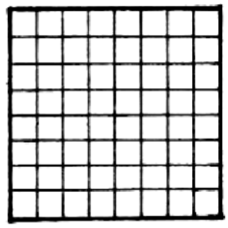
такви што постојат елементи $x\in A, y\in B$ за кои важи $x\equiv y(\text{mod}\,2n)$.

Дали секогаш постојат непразни множества $A' \subset A, B' \subset B$ такви што збирот на елементите од A' и елементите од B' е делив со $2n$?

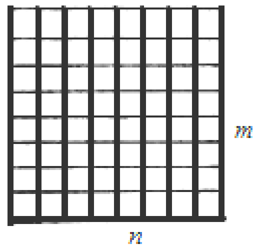
Решение. Не постојат секогаш. За произволен $n > 1$ да земеме, на пример,

$$a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_n \equiv b_1 \equiv b_2 \equiv ... \equiv b_{n-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2n) \text{ и } b_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2n).$$

Лесно се проверува дека за произволни непразни множества $A' \subset A, B' \subset B$ збирот на елементите од A' и елементите од B' не е делив со $2n$.



4. Градот има квадратна мрежа со m хоризонтални и n вертикални улици (цртеж десно). Колкава е најмалата должина на делот од мрежата кој треба да се асфалтира така што од секоја раскрсница до било која друга раскрсница може да се стигне по асфалтен пат?



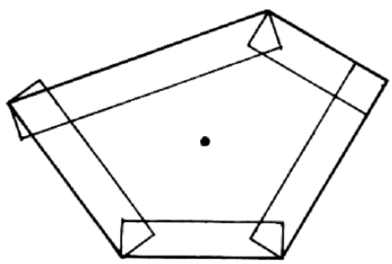
Решение. Во градот има mn раскрсници. Делот на улицата меѓу две соседни раскрсници да го наречеме сокак. За да тргнувајќи од една раскрсница, поминеме низ секоја од преостанатите $mn-1$ раскрсница движејќи се по асфалтиран дел од мрежата, мора да се асфалтирани најмалку $mn-1$ сокаци (до секоја следна раскрсница стигнуваме по нов сокак). На цртежот десно е прикажана мрежа во која се асфалтирани

$$n(m-1)+n-1 = mn-1$$

сокаци, во која секои две раскрсници се поврзани со асфалтиран пат.

Мала олимпијада

1. Докажи дека за секој конвексен многуаголник со плоштина P и периметар S постои круг со радиус $\frac{P}{S}$ кој се содржи во многуаголникот.



Решение. Над секоја страна на дадениот многуаголник конструираме правоаголник со висина $\frac{P}{S}$ кој со многуаголникот има заеднички внатрешни точки, цртеж десно. Бидејќи секои два правоаголници конструирани на соседни страни исто така имаат заеднички внатрешни точки, заклучуваме дека вкупната плоштина кои тие ја покриваат е помала од P, т.е. од плоштината на многуаголникот. Затоа постои точка во внатрешноста на многуаголникот која не е покриена со ниту еден правоаголник. Јасно, кругот со центар во таа точка и радиус $\frac{P}{S}$ се содржи во многуаголникот.

2. Дадени се $2n+1$ цели броеви со својство: ако се оддели било кој од нив, тогаш преостанатите $2n$ броеви може да се поделат во две групи по n броеви, така што збирот на броевите од едната група е еднаков на збирот на броевите од другата група. Докажи дека сите броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. Прво да забележиме дека ако броевите $a_i, i=1,2,...,2n+1$ го имаат наведеното својство, тогаш

1) за секој реален број k тоа својство го имаат броевите $a_i+k, i=1,2,...,2n+1$

2) за секој реален број k тоа својство го имаат броевите $ka_i, i=1,2,...,2n+1$.

Користејќи го 1) заклучуваме дека доволно е тврдењето да го докажеме при претпоставка дека еден од броевите, на пример бројот a_1, е еднаков на нула. Во овој случај лесно се добива дека сите дадени броеви се парни. Навистина, ако го одделиме бројот $a_1=0$ и преостанатите броеви ги поделиме во две групи со еднакви збирови, добиваме дека збирот на сите броеви е парен. Од друга страна, ако го одделиме било кој број a_i и преостанатите броеви ги поделиме во две групи со еднакви збирови, заклучуваме дека збирот на сите броеви освен a_i е парен. Затоа бројот a_i мора да е парен.

Бидејќи сите броеви $a_i, i=1,2,...,2n+1$ се парни, од 2) следува дека и целите броеви $\frac{1}{2}a_i, i=1,2,...,2n+1$ го имаат наведеното својство, при што еден од нив е еднаков на нула. Продолжувајќи ја понатаму оваа постапка добиваме дека за секој природен број j секој од дадените броеви е делив со 2^j, од што следува дека сите броеви се еднакви на нула. Со тоа тврдењето е докажано.

Забелешка. Тврдењето на задачата важи и ако $a_i, i=1,2,...,2n+1$ се произволни реални броеви за кои важи наведеното својство. Меѓутоа, во овој случај доказот е доста потежок.

3. Определи ги најмалата и најголемата вредност на функцијата

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}, (a>0, b>0),$$

при услови $x+z=y+t=1, x,y,z,t\geq 0$.

Решение. Од $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ следува $x^2\leq x, y^2\leq y$, па затоа важи

$$ax^2+by^2\leq ax+by.$$

Слично се докажува дека

$$az^2+bt^2\leq az+bt,$$

па затоа

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\leq 1+1=2.$$

Бидејќи $f(1,0,0,1)=2$, заклучуваме дека 2 е најголемата вредност на функцијата f при дадените услови.

Ќе докажеме дека при дадените услови важи

$$\frac{ax^2+by^2}{ax+by} \geq \frac{ax+by}{a+b}.$$

Навистина, последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(ax^2+by^2)(a+b) \geq (ax+by)^2,$$

односно со неравенството

$$ab(x-y)^2 \geq 0,$$

кое очигледно е точно. Затоа

$$f(x,y,z,t) = \frac{ax^2+by^2}{ax+by} + \frac{az^2+bt^2}{az+bt} \geq \frac{ax+by}{a+b} + \frac{az+bt}{a+b} = \frac{a(x+z)+b(y+t)}{a+b} = 1.$$

Бидејќи $f(,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1$, заклучуваме дека 1 е најмалата вредност на функцијата f при дадените услови.