Сојузен натпревар 1962

III година

1. Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c, a>0$. Докажи дека за секои x_1 и x_2 важи

$$f(\tfrac{x_1+x_2}{2})\le\tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

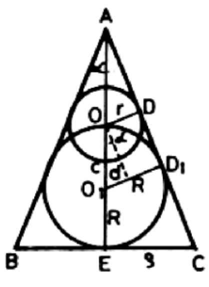
Решение. Бидејќи $a>0$, за секои $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned}f(\tfrac{x_1+x_2}{2})&=a(\tfrac{x_1+x_2}{2})^2+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&=a\tfrac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&=a\tfrac{2x_1^2+2x_2^2-(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)}{4}+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&\le a\tfrac{x_1^2+x_2^2}{2}+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&=\tfrac{ax_1^2+bx_1+c+ax_2^2++bx_2+c}{2}\\&=\tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2$.

2. Дадени се топки со радиуси R и r ($R<r$). Растојанието меѓу центрите на овие топки е c, при што $R-r<c<R+r$. Изрази го волуменот на конусот кој е опишан околу овие топки како функција од $R, d=R-r+c$. Докажи дека односот на волуменот на овој конус и поголемата топка е поголем или еднаков на 2. Определи ја плоштината на оној конус за кој тој однос е еднаков на 2.

Решение. Нека ABC е фиксиран оскин пресек на дадениот конус (A е врв на конусот). Со O и O_1 да ги означиме центрите на дадените топки, со D и D_1 се нивните допирни точки кои припаѓаат на разгледуваниот пресек со конусот, со E средината на основата на пресекот и со α аголот меѓу изводницата и висината на конусот (цртеж десно). Од правоаголниот $\triangle AOD$ добиваме $\frac{r}{AO}=\sin\alpha$, а од правоаголниот



трапез O_1D_1DO дека $\frac{d}{c}=\sin\alpha$. Оттука следува $\frac{r}{AO}=\frac{d}{c}$, т.е. $AO=\frac{cr}{d}$. Затоа висината на конусот е

$$h=AO+OO_1+O_1E=\tfrac{cr}{d}+c+R=\tfrac{c(r+d)+Rd}{d}=R\tfrac{c+d}{d}.$$

Ако со ρ да го означиме радиусот на основата на конусот, од триаголникот AEC добиваме

$$\rho = \operatorname{tg}\alpha = R\frac{c+d}{d}\frac{\frac{d}{c}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{c^2}}} = R\frac{c+d}{\sqrt{c^2-d^2}}.$$

Затоа волуменот на конусот е

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = \frac{\pi R^3}{3}\frac{(c+d)^2}{d(c-d)},$$

а неговиот однос спрема волуменот на поголемата топка е

$$V : \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{(c+d)^2}{4d(c-d)}.$$

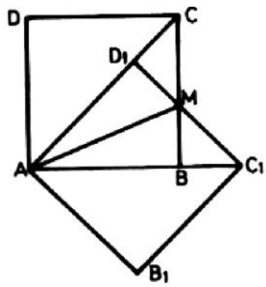
За да овој однос биде поголем или еднаков на 2, потребно и доволно е да важи $(c+d)^2 \geq 8d(c-d)$, односно $(c-3d)^2 \geq 0$. Знак за равенство важи ако и само ако $c = 3d$. Тогаш $\rho = R\sqrt{2}, h = 4R$, па изводницата на таков конус е еднаква на $\sqrt{h^2+\rho^2} = 3R\sqrt{2}$, а плоштината е

$$P = \pi R\sqrt{2}(R\sqrt{2} + 3R\sqrt{2}) = 8\pi R^2.$$

3. Квадрат $ABCD$ со страна a е заротиран за 45° околу темето A, така што темето B_1 на добиениот квадрат $A_1B_1C_1D_1$ се наоѓа во внатрешноста на дадениот квадрат. Нека M е пресекот на правите C_1D_1 и BC. Определи ја плоштината на квадратот со страна AM.

Решение. Триаголникот MBC_1 е рамнокрак правоаголен (цртеж десно), па затоа

$$MB = BC_1 = AC_1 - AB = a(\sqrt{2}-1).$$



Од правоаголниот триаголник ABM добиваме

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + MB^2 \\ &= a^2 + a^2(\sqrt{2}-1)^2 \\ &= 2a^2(2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

4. Дадена е функцијата $f(x) = A\cos x + B\sin x$ (A и B се константи). Ако постојат реални броеви x_1 и x_2 такви што разликата $x_1 - x_2$ не е цел број пати π и $f(x_1) = f(x_2) = 0$, докажи дека за секој реален број x важи $f(x) = 0$.

Решение. Ако равенството $f(x_1) = 0$ го помножиме со $\sin x_2$, а равенството $f(x_2) = 0$ го помножиме со $\sin x_1$ и така добиените равенства ги одземеме добиваме, $A\sin(x_2 - x_1) = 0$. Сега, бидејќи $x_2 - x_1 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, добиваме дека $A = 0$. Слично се докажува дека $B = 0$, па затоа $f(x) = 0$.

IV година

1. Дадена е низата $\log\sqrt{x}, \log\sqrt[4]{x}, \log\sqrt[8]{x},\dots$. Определи го збирот $S(x)$ на оваа низа и нацртај го графикот на функцијата $S(x),\ x>0$.

Решение. Општиот член на низата е

$$a_n(x)=\log(x^{\frac{1}{2^n}})=\frac{1}{2^n}\log x\ ,$$

па затоа

$$\frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)}=\frac{\frac{1}{2^n}\log x}{\frac{1}{2^{n-1}}\log x}=\frac{1}{2}\,,$$

што значи дека дадената низа е геометриска. Ако $\log x=0$, тогаш $a_n(x)=0$. Збирот на соодветниот ред е

$$S(x)=\frac{a_0(x)}{1-\frac{1}{2}}=2\log x\ .$$

На читателот му препуштаме да го скицира графикот на оваа функција.

2. Дадена се функциите $y_1=\sin^4 x+\cos^4 x$ и $y_2=\sin^6 x+\cos^6 x$. Докажи дека овие функции имаат основен период $\frac{\pi}{2}$ и дека $3y_1-2y_2=1$. За кои вредности на x првата функција има за $\frac{1}{16}$ поголема вредност од другата?

Решение. Со едноставни тригонометриски трансформации се добива

$$y_1=\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3+\cos 4x}{4},$$
$$y_2=\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5+3\cos 4x}{8}.$$

Затоа овие функции имаат основна периода еднаква на $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ и важи

$$3y_1-2y_2=1\ .$$

Равенката $y_1=y_2+\frac{1}{16}$ е еквивалентна на равенката $\cos 4x=\frac{1}{2}$, чии решенија се $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

3. Дадени се страните $a=BC$ и $b=CA$ на триаголникот ABC. Определи ја должината на третата страна, ако таа е еднаква на должината на сооодветната висина. За кои вредности на a и b задачата има решение?

Решение. Нека c е должината на непознатата страна и $s=\frac{a+b+c}{2}$. Од условот на задачата и Хероновата формула следува

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{c^2}{2}\ ,$$

од што по квадрирањето и средувањето по непозната c добиваме:

$$5c^4-2(a^2+b^2)c^2+(a^2-b^2)^2=0. \qquad (1)$$

Дискриминантата на оваа равенка е

$$D=-4(a^4-3a^2b^2+b^4)=-4(a^2-\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}b^2)(a^2-\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}b^2)$$

и е ненегативна само ако

$$\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}\le\tfrac{a}{b}\le\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Тогаш (1) има решенија $c^2=\frac{1}{5}(a^2+b^2\pm\sqrt{D})$. Во случајот кога $a=b$, едното од решенијата е еднакво на нула, па отпаѓа. Во случајот кога $D=0$, решенијата се поклопуваат.

4. Во рамнината α се дадени права p и точка P, која не припаѓа на правата p. Определи го геометриското место на точки M во рамнината α, за кои важи $\frac{MP}{MN}=c$, ако N е подножјето на нормалата од точката P на правата p, а c е даден позитивен број.

Решение. Бараното геометриско место е еден од конусните пресеци: елипса ако $c<1$, парабола ако $c=1$ и хипербола ако $c>1$. Доказот на ова тврдење може да се најде во секој учебник по аналитичка геометрија, а негде наведениот услов се зема во дефиницијата на поимот конусен пресек.