Задаци са распоредима бројева

верзија 2.0: 9.6.2016.

Душан Ђукић

1. Дато је $n \in \mathbb{N}$. Бројеви $1, 2, \ldots, n$ су распоређени по кругу тако да збир никоја три суседна није већи од S. Колико најмање може бити S за $n = 9$?

2. Дат је природан број n. Колико највише дисјунктних парова елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ може да се одабере тако да су збирови у паровима различити и не већи од n?

3. Дат је природан број n. Посматрајмо све тројке (a, b, c) различитих природних бројева са $a + b + c = n$. Наћи највећи могући број таквих тројки које се могу изабрати тако да никоје две немају заједнички елемент.

4. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да се бројеви $1, 2, \ldots, 3n$ могу распоредити у поља таблице $3 \times n$ тако да је у свакој врсти збир бројева једнак и дељив са 6, и у свакој колони је збир бројева једнак и дељив са 6.

5. На кругу је дато n тачака означених бројевима $1, 2, \ldots, n$. Колико има лукова са крајевима у датим тачкама таквих да су све тачке у унутрашњости лука (ако их има) означене бројевима мањим од оних на крајевима?

6. Могу ли се бројеви од 1 до 25 распоредити по кругу тако да збир ма којих пет узастопних даје остатак 1 или 4 при дељењу са 5?

7. Доказати да се бројеви $1, 2, \ldots, 2013$ не могу распоредити по кругу тако да за свака два суседна броја x, y важи $503 \leq |x - y| \leq 1005$.

8. Дат је природан број n. За коју пермутацију $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бројева $1, 2, \ldots, n$ је збир $S = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ (а) највећи; (б) најмањи?

9. За које n је могуће распоредити n различитих бројева у теменима правилног n-угла тако да, кад год су A, B и C различита темена за која је $AB = AC$, број у A је или већи од оба броја у B и C, или мањи од оба?

10. Означимо $N = 1000!$. Могу ли се бројеви $1, 2, \ldots, N$ распоредити по кругу тако да се у смеру казаљке на сату сваки број добија увећавањем претходног за 17 или 28 по модулу N?

11. За које n је могуће распоредити n различитих бројева по кругу тако да је сваки број већи од наредних 100 (у смеру казаљке на сату) или мањи од наредних 100, али да се то својство губи брисањем било ког броја?

12. Могу ли се у поља таблице 2002×2002 уписати бројеви $1, 2, \ldots, 2002^2$ тако да, за свако поље, у врсти или колони која садржи то поље постоје три броја од којих је један производ друга два?

13. У поља таблице 8×8 уписани су бројеви $1, 2, \ldots, 64$ тако да у су свакој врсти (слева надесно) и свакој колони (одозго надоле) бројеви у растућем поретку. Доказати да збир бројева на споредној дијагонали није мањи од 204.

14. Бројеви $1, 2, \ldots, n^2$ распоређени су по кругу ($n \in \mathbb{N}$). У сваком кораку мењају места нека два суседна броја који раније нису мењали места. Ако је извршено не више од $n^3/100$ корака, доказати да може да се изврши још један.

15. Бројеви од 1 до n^2 су произвољно распоређени у поља таблице $n \times n$ ($n \geq 2$). За сваки пар бројева у истој вести или колони израчунат је количник при дељењу већег и мањег. *Карактеристика* таблице је најмањи од ових $n^2(n-1)$ количника. Која је највећа могућа вредност карактеристике?

16. У поља таблице 10×10 уписани су бројеви $1,2,\dots,100$ тако да збир никоја два суседна (са заједничком страницом) није већи од S. Колико најмање може бити S?

17. Дат је природан број $n \geqslant 3$, и $n+1$ тачака на кругу које га деле на лукове једнаке дужине. Посматрајмо сва могућа означавања ових тачака бројевима $0,1,\dots,n$, где се свака ознака користи тачно једном; два таква означавања сматрају се истим ако се једно може добити из другог ротирањем круга. Означавање се назива *лепим* ако, за сваке четири ознаке $a<b<c<d$ за које је $a+d=b+c$, тетива која спаја тачке означене са a и d не сече тетиву која спаја тачке означене са b и c.

    Нека је M број лепих означавања, а N број уређених парова (x,y) природних бројева таквих да је $x+y\leqslant n$ и НЗД$(x,y)=1$. Доказати да је $M=N+1$.

Решења

1. Нека је $a_1,a_2,\dots,a_n$ пермутација бројева $1,2,\dots,n$ и $s_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$. Како је $s_k-s_{k+1}=a_k-a_{k+3}\neq 0$, бар један међу s_k,s_{k+1} није већи од $S-1$. Такође, не може да важи $s_k=s_{k+2}=s_{k+4}=S$ и $s_{k+1}=s_{k+3}=s_{k+5}=S-1$, јер би тада било $a_k=a_{k+6}$. Дакле, $s_k+s_{k+1}+\cdots+s_{k+5}\leqslant 6S-4$. Сабирањем по свим k добијамо $9n(n+1)=18(a_1+\cdots+a_n)\leqslant n(6S-4)$, одакле је $S>\frac{3n+4}{2}$, тј. $S\geqslant[\frac{3n+6}{2}]$.

    За $n=9$ је $\min S=16$ и достиже се за распоред $1,6,7,2,5,8,3,4,9$.

2. Нека јер x број парова. Пошто су дисјунктни, збир S свих $2x$ елемената у њима је бар $1+2+\cdots+2x=x(2x+1)$. С друге стране, $S\leq n+(n-1)+\cdots+(n+1-x)=\frac{x(2n+1-x)}{2}$ јер су збирови у њима различити и не већи од n. Следи да је $2x(2x+1)\leq x(2n+1-x)$, тј. $x\leq\frac{2n-1}{5}$.

    Даћемо пример са тачно $[\frac{2n-1}{5}]$ парова. За $n=5k+3$ може се одабрати $\frac{2n-1}{5}=2k+1$ парова:

пар	$2k+2$	$2k+3$	$\dots$	$3k+1$	$3k+2$	$3k+3$	$\dots$	$4k+1$	$4k+2$
	$2k$	$2k-2$	$\dots$	2	$2k+1$	$2k-1$	$\dots$	3	1
збир	$4k+2$	$4k+1$	$\dots$	$3k+3$	$5k+3$	$5k+2$	$\dots$	$4k+4$	$4k+3$

    Иста конструкција ради и за $n\in\{5k+4,5k+5\}$. Пример $\frac{2n-1}{5}=2k$ парова за $n=5k+1$ може се добити брисањем пара $(3k+2,2k+1)$ и умањивањем првог елемента сваког преосталог пара за 1. Иста конструкција ради за $n=5k+2$.

3. Нека тројке (a_i,b_i,c_i), $i=1,2,\dots,k$ задовољавају услове задатка. Збир свих елемената a_i,b_i и c_i једнак је kn; с друге стране, он није мањи од $1+2+\cdots+3k=\frac{3k(3k+1)}{2}$, одакле је $3(3k+1)\leqslant 2n$, тј. $k\leqslant\frac{2n-3}{9}$.

    Одговор је управо $k_{max}=[\frac{2n-3}{9}]$, што показују следећи примери:

$$\begin{aligned} n\geqslant 9m-3\Rightarrow k\geqslant 2m-1: &\quad (i,4m-2i,n-4m+i)_{i=1}^{m}\ \cup\\ &\quad (m+i,4m-2i-1,n+1-5m+i)_{i=1}^{m-1}\\ n\geqslant 9m+2\Rightarrow k\geqslant 2m: &\quad (i,4m+1-2i,n-1-4m+i)_{i=1}^{m}\ \cup\\ &\quad (m+i,4m+2-2i,n-2-5m+i)_{i=1}^{m}. \end{aligned}$$

4. За почетак, по услову задатка $\frac{1+2+\cdots+3n}{3}=\frac{n(3n+1)}{2}$ и $\frac{1+2+\cdots+3n}{n}=\frac{3(3n+1)}{2}$ су дељиви са 6, одакле следи $n\equiv 9 \pmod{12}$.

    За $n=3^m$ $(m\in\mathbb{N})$ пронаћи ћемо распоред бројева $1,\dots,3n$ у правоугаоник $3\times n$ тако да све врсте имају исти збир и све колоне имају исти збир. Самим тим, за $2\mid m$ овај распоред ће задовољити и услов дељивости са 6.

    За $m=1$ жељени распоред је магични квадрат 3×3. Нека за неко $m\geqslant 1$ имамо жељени распоред са врстама V_1^m,V_2^m,V_3^m. Тада за $m+1$ конструишемо распоред са врстама $V_1^{m+1},V_2^{m+1},V_3^{m+1}$, где је $V_i^{m+1}=(V_i^m+(i-1)3^{m+1},V_i^m+i3^{m+1},V_i^m+(i+1)3^{m+1})$, при чему се сабира по модулу 3^{m+2}.

5. Доказаћемо индукцијом да таквих лукова има тачно $2n-2$. За $n=3$ тврђење је тачно; претпоставимо да оно важи за n и докажимо га за $n+1$. По индуктивној претпоставци, број посматраних лукова означених тачкама $2,3,\dots,n+1$ је тачно $2n-2$. Осим њих, постоје још само два лука са једним крајем означеним бројем 1 (и на њима нема других тачака), чиме је тврђење доказано.

6. Не могу. Претпоставимо супротно, да је $a_1,a_2,\dots,a_{25}$ жељени распоред. Поделимо бројеве на 5 група од по 5 за редом. У свакој групи збир је ±1 по модулу 5, али збир свих 25 бројева је дељив са 5. Следи да свих 5 група дају исти остатак (1 или -1) при дељењу са 5, тј. $S_i \equiv S_j \pmod 5$ за $i \equiv j \pmod 5$, где је $S_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4}$ (индекси су по модулу 25).

   За свако i имамо две могућности: (1°) $S_{i+1} \equiv S_i$ или (2°) $S_{i+1} \equiv -S_i \pmod 5$. У случају (1°) имамо $a_i \equiv a_{i+5} \equiv a_{i+10} \equiv a_{i+15} \equiv a_{i+20} \pmod 5$, док у (2°) важи $a_{i+5} - a_i \equiv \pm2 \pmod 5$, па $a_i, a_{i+5}, a_{i+10}, a_{i+15}, a_{i+20}$ чине потпун систем остатака по модулу 5.

   Како међу бројевима $1,2,\dots,25$ нема шест бројева са истим остатком при дељењу са 5, немогуће је да се у истом распореду бројева појаве оба случаја. С друге стране, није могуће ни да за свако i важи случај (2°), јер је у супротном $S_1 \equiv -S_2 \equiv S_3 \equiv \cdots \equiv -S_6 \equiv -S_1 \pmod 5$. Према томе, за свако i важи (1°), тј. $a_{i+5} \equiv a_i \pmod 5$. Али тада се међу бројевима $a_1,a_2,\dots,a_5$ појављују сви остаци по модулу 5, а њихов збир је дељив са 5, што је конрадикција.

7. Претпоставимо да је могуће. Поделимо бројеве на два скупа: $A = \{504, 505, \dots, 1510\}$ и $B = \{1, 2, \dots, 503, 1511, 1512, \dots, 2013\}$. Два елемента скупа B не могу бити суседна. Осим тога, бројеви 504 и 1510, који леже у A, нису суседни и имају бар по једног суседа из A. Следи да је $1007 = |A| \geq |B| + 2 = 1008$, контрадикција.

8. Означимо бројеве са $a_1,a_2,\dots,a_n$ у смеру казаљке на сату. Посматрајмо неки делилац $d \mid n$, $d < n$. Нека је без смањења општости $a_1 > a_{1+d}$. Тада је по услову задатка $a_{1+d} < a_{1+2d} > a_{1+3d} < \cdots$ (индекси су по модулу n), тј. $a_{1+kd} > a_{1+(k+1)d}$ за парно k и $a_{1+kd} < a_{1+(k+1)d}$ за непарно k. Тако за $k = \frac{n}{d}$ закључујемо да $\frac{n}{d}$ мора бити парно. То важи за све d, тј. сви делиоци броја n већи од 1 су парни, што значи да је n степен двојке.

   Покажимо да је за $n = 2^k$ могуће распоредити бројеве $1,2,\dots,n$ на тражени начин. За $k \leq 1$ то је очигледно. Нека је $k > 1$: по индуктивној претпоставци постоји распоред $a_1,a_2,\dots,a_{n/2}$ бројева $1,2,\dots,\frac{n}{2}$ (у смеру казаљке на сату) са траженим својством. Лако се проверава да тада распоред $a_1, a_1+\frac{n}{2}, a_2, a_2+\frac{n}{2}, \dots, a_{n/2}, a_{n/2}+\frac{n}{2}$ бројева $1,2,\dots,n$ има тражено својство.

9. Претпоставимо да такав распоред постоји. Ако се следбеник броја k добија операцијом $+28$ (тј. додавањем 28), онда се и следбеник броја $k+11$ добија операцијом $+28$; аналогно, исто важи и за бројеве $k+22, k+33, \dots,$ тј. за све бројеве конгруентне броју k по модулу 11.

   Међу 12 бројева за редом на кругу постоје два са истим остатком при дељењу са 11. По претходном, то исто важи и за бројеве који им следе итд. Према томе, низ операција је периодичан с неким периодом s не већим од 11. Тако се сваки број, применом s операција, увећава за фиксан број M, $11s \leq M \leq 28s \leq 1000$. Како $M \mid N$, почевши од неког броја, након sN/M операција бисмо опет добили полазни број, контрадикција.

10. Зовемо број *малим* ако је мањи од наредних 100, и великим у супротном. Претпоставимо да су бројеви распоређени на тражени начин. Пре најмањег броја стоји бар 100 великих бројева (у опадајућем поретку): нека је први од њих x, а одмах пре њега мали број y. Покушајмо да избришемо y. Својство из задатка се на овај начин губи због неког броја z пре y: тада мора бити $z > y$, па је z велики (наиме, ако је z мањи од y, брисањем y он би остао мали). Такође $z < x$, јер би у супротном z остао велики након брисања y. Следи да се између z и x налази тачно 100 малих бројева,

мањих од оба. Аналогно, пре њих се налази 100 великих бројева, завршно са z, итд. Овако се сви бројеви на кругу деле на групе од по 100 малих и великих наизменично, па је n дељиво са 200.

Сада ћемо дати пример траженог распореда бројева $0, 1, \dots, 200k-1$. Бројеви од 0 до $100k-1$ биће мали, а остали велики. Прво поставимо мале бројеве дељиве са k у растућем поретку (у смеру казаљке на сату); потом велике дељиве са k у опадајућем поретку, па мале конгруентне са 1 по модулу k у растућем, па велике конгруентне са 1 у опадајућем, итд.

11. Не. У бар једној врсти и бар једној колони нема бројева мањих од 2002, па је у њима производ свака два броја већи од 2002^2.

12. За свако поље на споредној дијагонали дефинишимо његову *куку* као скуп поља директно изнад или директно лево од њега, укључујући и њега самог. Свака кука садржи тачно 8 поља и сваке две куке имају тачно једно заједничко поље. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_8$ бројеви на споредној дијагонали (не обавезно тим редом).

    За $k = 1, \dots, 8$, број a_k није мањи од бројева на кукама бројева $a_1, a_2, \dots, a_k$. Тих бројева има укупно $8k$, али пресеци двеју кука су бројани двапут, а њих има тачно $\binom{k}{2}$. Зато је $a_k \geq 8k - \binom{k}{2}$. Сада је $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \geq \sum_{k=1}^{8} 8k - \binom{k}{2} = 8 + 15 + 21 + 26 + 30 + 33 + 35 + 36 = 204$.

13. Претпоставимо да је коначна позиција баш $1, 2, \dots, n^2$ и спроведимо кораке обрнутим редоследом почев од ње. Када дођемо до "полазне" позиције, бројеви i и $i+1$ су мењали места тачно једном за свако $i = 1, \dots, n^2$ $(n^2 + 1 = 1)$.

    Кад год два броја a и b мењају места, подвући ћемо оба. Треба показати да је било бар $n^3/50$ подвлачења. Претпоставимо супротно. Тада је међу неких n узастопних бројева, рецимо $1, 2, \dots, n$, било не више од $n^2/50$ подвлачења. Како се сваки од бројева $1, 2, \dots, n$ могао померити за највише $n^2/50$ места (мање од четвртине круга), а бројеви i и $i+1$ $(i = 1, \dots, n-1)$ су мењали места тачно једном, у "полазној" позицији је број $i+1$ пре броја i; шта више, за $i < j$, у "полазној" позицији је j пре i. Али пошто је у "коначној" позицији i пре j, успут су они морали да промене места. Дакле, свака два броја међу $1, 2, \dots, n$ су мењала места, што даје бар $n^2 - n$ подвлачења, контрадикција.

14. Означимо са $C(A)$ карактеристику таблице A. Бар два од бројева $\{n^2 - n, n^2 - n + 1, \dots, n^2\}$ су у истој врсти и бар два су у истој колони, па бар један од та два пара није пар $(n^2 - n, n^2)$. Зато је $C(A) \leq \max\left\{\frac{n^2}{n^2-n+1}, \frac{n^2-1}{n^2-n}\right\} = \frac{n^2-1}{n^2-n} = \frac{n+1}{n}$.

    С друге стране, попунимо таблицу тако да је $a_{ij} \equiv i + n(j-i) \pmod{n^2}$.
    У овом распореду свака два броја у истој врсти или колони се разликују за бар $n-1$, и притом су n^2 и n^2-n+1 у различитим врстама и колонама, па је $C(A) \geq \frac{n^2-1}{n^2-n} = \frac{n+1}{n}$.
    Према томе, одговор је $\frac{n+1}{n}$.

15. На следећи начин можемо да конструишемо пример са $S = 106$: Обојмо поља црно и бело попут шаховске табле, редом упишимо бројеве $1, 2, \dots, 50$ на бела поља, а онда редом $100, 99, \dots, 51$ на црна.

    Претпоставимо да постоји распоред за који је $S \leq 105$. Поделимо таблицу на пет хоризонталних правоугаоника 2×10, односно на пет вертикалних правоугаоника 10×2 - назваћемо ове правоугаонике хоризонталним и вертикалним *појасима.* Уписујмо бројеве $100, 99, 98, \dots$ редом све до момента када у сваком вертикалном појасу, *или* у сваком хоризонталном, постоји бар један број. Нека је последњи уписани број n.

    Претпоставимо да је $n < 68$. Како бар један хоризонталан и један вертикалан појас не садрже ниједан од бројева $68, \dots, 100$, сви ови бројеви су у делу таблице од највише 64 поља који се може поделити на домине, па су бар два од њих суседна, а збир им је већи од 105, што је немогуће. Зато је $n \geq 68$ и никоја два међу бројевима $n, n+1, \dots, 100$ нису суседни.

Даље, ако неки нпр. вертикални појас садржи 10 бројева, онда сваки хоризонтални појас већ садржи бар два броја, супротно избору броја n. Следи да сваки појас садржи највише 9 бројева. Приметимо сада да ако неки појас садржи $k \leq 9$ несуседних бројева, онда ови бројеви имају бар $k+1$ празних суседних поља у истом појасу. Зато укупан број празних поља суседних неком од бројева $n, n+1, \ldots, 100$ није мањи од $(101-n)+5 = 106-n$. У једно од тих поља је уписан број не мањи од $106-n$, а у суседном пољу број не мањи од n, контрадикција.

16. (а) Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тражена пермутација, и притом $a_{n+i} = a_i$. Претпоставимо да је $a_i > a_j$ за неко i, j. Заменом сегмента $a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}$ сегментом $a_{i-1}, a_j, a_{j-1}, \ldots, a_{i+1}, a_i, a_{j+1}$ збир S се увећава за $a_{i-1}a_j + a_ia_{j+1} - a_{i-1}a_i - a_ja_{j+1} = (a_j - a_i)(a_{i-1} - a_{j+1})$, па ово не сме бити позитивно. Дакле, из $a_i > a_j$ следи $a_{i-1} \geqslant a_{j+1}$.

    Нека је $a_1 = 1$ и $a_n < a_2$ (остали распореди ће се добити ротацијом и симетријом овог). Тада је $a_i > a_1$ за $i = 2, \ldots, n$, па је по претходном $a_{i-1} \geqslant a_2$, одакле добијамо $a_2 = 3$; слично је $a_n = 2$. Настављајући овај поступак налазимо цео распоред: то је $1, 3, 5, 7, \ldots, 6, 4, 2$.

    (б) Овај део задатка се ради слично, а тражени распоред је $1, n-1, 3, n-3, 5, n-5, \ldots, n-4, 4, n-2, 2, n$.

17. Нека су a и b различити бројеви из $\{0, 1, \ldots, n\}$. Назовимо (a,b)-распоредом леп распоред у коме су a и b редом десни и леви сусед броја 0. Доказаћемо да (a,b)-распоред постоји ако и само ако је нзд$(a,b) = 1$ и $a+b > n$; шта више, ако постоји, он је јединствен.

    Ако је $a + b \leq n$, тетиве $[0, a+b]$ и $[a, b]$ се секу, па тада (a,b)-распоред не постоји.

    Нека је сада $a + b > n$. Претпоставимо да је R један (a,b)-распоред. За дато $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$ дефинишимо $z_0 = c$ и, за $k \geq 0$,

$$z_{k+1} = \begin{cases} z_k + a & \text{ако је } z_k \leq n-a; \\ z_k - b & \text{ако је } z_k > n-a \text{ и } z_k \geq b; \\ z_k + a - b & \text{иначе.} \end{cases}$$

    Овај низ је добро дефинисан. Приметимо да за свако $k \geq 1$ важи бар једна од једнакости $z_{k+1} + 0 = z_k + a$, $z_{k+1} + b = z_k + 0$ или $z_{k+1} + b = z_k + a$. У сваком случају, бројеви $0, z_k$ и z_{k+1} у R леже тим редом у смеру казаљке на сату. То значи да ако су бројеви $z_1, z_2, \ldots, z_m$ различити од нуле, они се појављују у R тим редом након нуле (не обавезно као узастопни).

    (i) Ако је нзд$(a,b) > 1$, узмимо $c = 1$. Тада се у низу (z_k) никад не појављује нула, што је немогуће.

    (ii) Нека је нзд$(a,b) = 1$. Ставимо $c = 0$. Како је $z_{k+1} \equiv z_k + a \pmod{a+b}$ ако је $z_k + a \leq n$, док је у супротном $z_{k+1} \equiv z_k + 2a \pmod{a+b}$, низ $(z_k)_{k \geq 1}$ се поклапа са низом који се добије када се из низа остатака $a, 2a, 3a, \ldots$ по модулу $a+b$ избаце чланови већи од n. Према томе, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ је пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$, па је распоред R једнозначно одређен.

    Како парова (a,b) са нзд$(a,b) = 1$ и $a + b > n$ има тачно $N + 1$ (докажите то!), овим је доказ завршен.

Београд, 2013-2014.