Драгољуб Милошевић (Прањани)

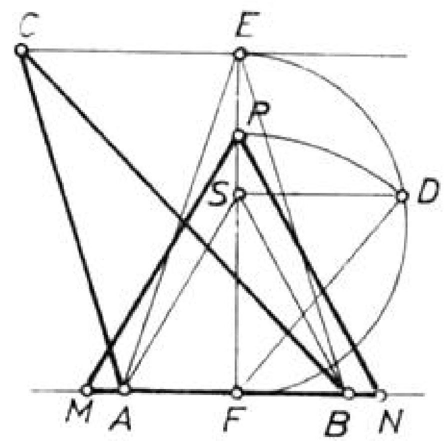
КАКО СЕ МОЖЕ ПРЕТВОРИТИ ПРОИЗВОЉАН ТРОУГАО У ЈЕДНАКОСТРАНИЧАН ИСТЕ ПОВРШИНЕ?

Не ретко наилазимо на проблеме чија је формулација тако проста, да је разумљива и оном ко мало познаје тајне математике. Међутим, из тог још не следује да је и решење самог проблема увек просто. Питање које смо навели у наслову овог чланка захтева од решаваоца већ извесно боље познавање геометрије, и то нарочито познавање правила сличности троуглова и њихове примене.

Анализирајмо мало дати проблем. Нека је дат произвољан троугао ABC (сл. 1). Полазећи од тога да сви троугли једнаких основица и једнаких висина имају једнаке површине, није тешко дати троугао ABC претворити у једнакокраки троугао ABE. Ово ћемо постићи кад конструишемо нормалу у тачки F ($F \in AB$ и $AF = BF$) и повучемо кроз тачку C паралелу са AB. Пресек E ове две праве биће врх траженог једнакокраког троугла.

Међутим, да бисмо после тога овај тако нађени троугао ABE претворили у једнакостраничан троугао, морамо извршити и тзв. алгебарску анализу овог задатка. Ова се састоји у томе да помоћу познатих елемената одредимо алгебарски неки елеменат тражене фигуре на основу којег ћемо је моћи конструисати.

Претпоставимо да је троугао MNP (сл. 1) тражени једнакостранични троугао, о коме још не знамо како је био, конструисан. Тај троугао, пошто је једнакостраничан, сличан је једнакостраничном троуглу ABS, конструисаном над основицом датог троугла ABC. Обележимо са h_1 висину FE датог троугла ABC, са h_2 висину једнакостраничног троугла ABS, а са x висину траженог једнакостраничног троугла MNP. Како је $\Delta MNP \sim \Delta ABS$, то је (према оном што се зна о сличним троуглима) $P_{\Delta MNP} : P_{ABC} = x^2 : h_2^2$ [1]. Како пак троугао ABE и ABS имају заједничку основицу, то је (према оном што се зна о површинама троуглова једнаких основа) $P_{\Delta ABF} : P_{\Delta ABS} = h_1 : h_2$.



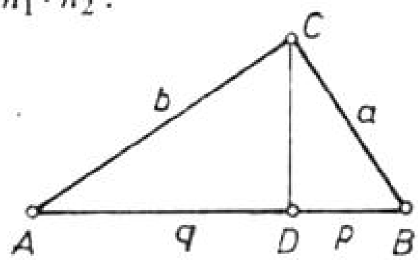
Сл. 1

[1] Познато је да се површине сличних троуглова односе као квадрати њихових одговарајућих висина.

Узмимо сад у обзир да су троугли MNP и ABE, по претпоставци, међусобно једнаки; тада, на основу већ наведене једнакости $P_{\Delta MNP} : P_{\Delta ABS} = x^2 : h_2^2$, добијамо: $P_{\Delta ABE} : P_{\Delta ABS} = x^2 : h_2^2$. Но, како је истовремено и $P_{\Delta ABE} : P_{\Delta ABS} = h_1 : h_2$, то је $x^2 : h_2^2 = h_1 : h_2$, тј. $x = \sqrt{h_1 \cdot h_2}$.

Према томе, висина траженог једнакостраничног троугла ANP представља геометријску средину висине датог троугла ABC (односно њему једнаког троугла ABE) и висине једнакостраничног троугла ABS, конструисаног над основицом AB датог троугла ABC. Зато, да би се одредио положај тачке P на дужи EF треба конструисати дуж чија дужина износи $\sqrt{h_1 \cdot h_2}$.

За одређивање дужи која је геометријска средина двеју датих дужи постоји више начина, од којих ћемо искористити онај који произлази из следећег познатог става о правоуглом троуглу: да је свака катета правоуглог троугла геометријска средина хипотенузе и пројекције те катете на хипотенузу, тј. да је (према сл. 2) $a = \sqrt{cp}$ и $b = \sqrt{cq}$. Због тога ћемо положај тачке P на дужи FE одредити на следећи начин.



Сл. 2

Над дужи $FE = h_1$, као над хипотенузом, конструисаћемо половину кружнице, а из тачке S повућићемо нормалу на FE до њеног пресека D са нацртаним кружним луком (сл. 1). Како је троугао FDE правоугли троугао са правим углом код D [2)], то је према претходном $FD = \sqrt{FE \cdot FS}$. Значи, FD је геометријска средина висина h_1 и h_2, па се, према томе, тачка P добија преношењем дужи FD на дуж FE, узимајући за њихов заједнички почетак тачку F.

Са одређивањем положаја тачке P постављени задатак је решен, јер после тога треба још само повући кроз ову тачку паралелне праве са страницама SA и SB већ нацртаног троугла ABS и тако на правој AB одредити тачке M и N.

Задаци

1. Претворити у квадрат: а) дати правоугаоник; б) дати троугао; в) дати трапез.

2. Збир, односно разлику два квадрата представити као један квадрат.

3. Дати кружни прстен претворити у круг.

[2)] Познато је да су они периферијски углови, чији краци пролазе кроз крајеве пречника круга, међусобно једнаки и прави.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија