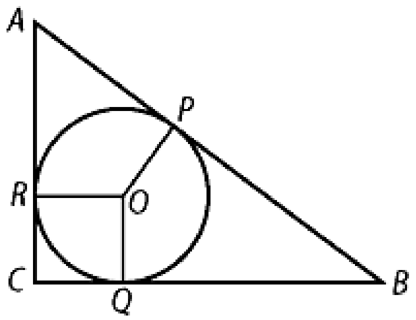
О КРУЖНИЦИ УПИСАНОЈ У ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО

Ратко Тошић, Нови Сад

Посматраћемо правоугли троугао ABC са правим углом код темена C. Његове странице су a, b, c, при чему су a и b катете (наспрам темена A и B редом) и c хипотенуза. Кружница над пречником $AB = c$ је описана кружница тога троугла и њен полупречник једнак је $\frac{c}{2}$. У овом чланку ћемо кроз решења неколико задатака доказати нека тврђења у вези са уписаном кружницом. Њен пречник означаваћемо са r.

Задатак 1. Докажи да је $r = \frac{a+b-c}{2}$.

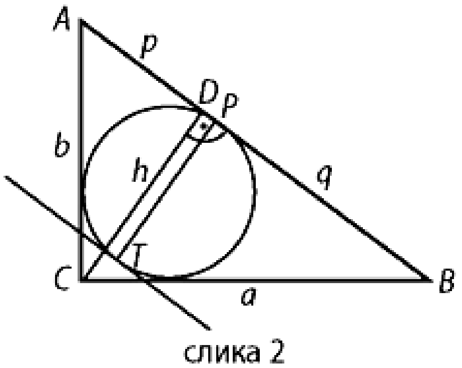
Решење. Нека је O центар описане кружнице, а P, Q, R редом тачке у којима та кружница додирује странице c, a, b (слика 1). Како су OQ и OR нормалне на странице BC и CA, четвороугао $OQCR$ је квадрат са страницама дужине r. Даље је $AP = AR$ и $BQ = BP$ (једнакост тангентних дужи из тачке на кружницу), одакле је $a + b = AR + r + BQ + r = AP + BP + 2r = c + 2r$, па следи да је $2r = a + b - c$, одакле следи тврђење.



слика 1

Задатак 2. Нека је $CD = h$ висина на хипотенузу правоуглог троугла ABC и r, r_1, r_2 редом полупречници кружница уписаних у троуглове ABC, ADC и BDC. Докажи да је

$$r + r_1 + r_2 = h.$$



слика 2

Решење. Нека је $AD = p$, $BD = q$ (слика 2). Троугао ADC је правоугли са катетама p и h и хипотенузом b. Троугао BDC је правоугли са катетама q и h и хипотенузом a. Према претходном задатку је:

$$r = \frac{a+b-c}{2},\ r_1 = \frac{p+h-b}{2},\ r_2 = \frac{q+h-a}{2}.$$

Сабирањем тих једнакости, имајући у виду да је $p + q = c$, добијамо да је

$$r + r_1 + r_2 = h.$$

Задатак 3. Докажи да за правоугли троугао важи неједнакост $r < \frac{h}{2}$.

Решење 1. Користимо познату формулу за површину произвољног троугла са страницама a, b, c:

$$S = r \cdot \frac{a+b+c}{2}.$$

Како је код правоуглог троугла и $S = \frac{1}{2}ch$, то на основу $a + b > c$ (неједнакост троугла), следи да је $r \cdot \frac{2c}{2} < \frac{1}{2}ch$, одакле је $r < \frac{h}{2}$.

Решење 2. Следи на основу слике 2. (Образложи!) На слици је PT пречник кружнице паралелан висини h.

Задатак 4. Докажи да се површина правоуглог троугла може израчунати по формули

$$S = r\,(c + r).$$

Решење 1.

$$r(r+c) = \frac{a+b-c}{2} \cdot \left(c + \frac{a+b-c}{2}\right) = \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{((a+b)-c)\cdot((a+b)+c)}{4} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4} = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{4} = \frac{2ab}{4} = \frac{ab}{2} = S.$$

Решење 2. Користимо формулу $S = rs$ за површину троугла, где је s полуобим троугла. Полуобим правоуглог троугла једнак је $r + c$, одакле следи тврђење.

Правоугли троугао код кога су дужине свих страница цели бројеви назива се Питагорин троугао. Такав је, на пример, троугао са страницама дужине 3, 4, 5, а такође и троугао са страницама дужине 5, 12, 13. Дужине страница Питагориног троугла чине Питагорину тројку бројева, тј. тројку природних бројева (x, y, z) такву да је $x^2 + y^2 = z^2$.

Задатак 5. Докажи да полупречник кружнице уписане у Питагорин троугао има целобројну дужину.

Решење. Нека су a, b, c дужине страница Питагориног троугла. Како је $r = \frac{a+b-c}{2}$, довољно је доказати да је $a + b - c$ паран број. Како је
$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc = c^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) = 2(c^2 + ab - ac - bc)$
паран број, следи да је и $a + b - c$ паран број, чиме је тврђење доказано.

Задаци за самостални рад

1. Докажи да у правоуглом троуглу важи

$$r \geq \sqrt{2S} - \frac{c}{2}$$

   где је S површина троугла.

2. Докажи да за сваки природан број n постоји Питагорин троугао код кога је полупречник уписане кружнице једнак n.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија