ХЕУРИСТИКА[1] И СУМЕ РЕЦИПРОЧНИХ ТРАНСЛИРАНИХ ПРОИЗВОДА

Петар Свирчевић, Загреб

У првом разреду средње школе, или чак раније, ученици сазнају како је Карл Фридрих Гаус (1777-1855), један од највећих математичара свих времена, у другом разреду основне школе напамет сабрао природне бројеве од 1 до 100. Његов генијални резон, за тај узраст, био је

$$1+2+\cdots+99+100=(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)$$
$$=50\cdot 101=5050.$$

Општа формула за суму првих n природних бројева, која се може извести на више начина, дата је у облику

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Користећи (1) и идентитет $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ добија се формула за суму квадрата првих n природних бројева која гласи

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

Даље, уз помоћ (1), (2) и идентитета $(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$ добија се формула за суму кубова првих n природних бројева, тј.

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Генерално, може се добити формула за $1^k+2^k+\cdots+n^k$, за $k\geq 2$, уколико су претходно добијене формуле за $1^l+2^l+\cdots+n^l$, за $1\leq l\leq k-1$.

Помоћу ових формула могу се наћи и сложеније суме као што су

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1) \tag{3}$$
$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2). \tag{4}$$

[1] Хеуристика – наука о методама откривања нових сазнања и научних истина. Потиче од грчке речи хеурека (εὕρηκα) = пронашао сам. То је узвикнуо Архимед кад је, купајући се, открио хидростатички закон.

Остављамо читаоцу, као задатак, да одреди те суме. Обрада још сложенијих сума степена природних бројева може се наћи у [8].

Проблем одређивања таквих и сличних сума може се даље уопштити. Наиме, уместо сума (3) и (4) можемо посматрати нове суме чији су сабирци реципрочне вредности постојећих. Реч је о сумама

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \tag{5}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\,. \tag{6}$$

Код суме (5) "пали" мали трик који се базира на идентитету $\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$. Тако је

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

У изразу на десној страни, сабирци се у паровима потиру; $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$, … , $-\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n}$. Остају само први и последњи, па је

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Сумом (6) ћемо се бавити нешто касније.

Вратимо се поново суми (5). Имениоци сабирака су $1\cdot 2,\ 2\cdot 3, \ldots ,$ $n(n+1)$. Ако погледамо низ $1, 2, 3, \ldots , n, n+1$, а то је аритметички низ с првим чланом 1 и диференцијом 1, онда је први именилац производ прва два члана тога низа, други је производ другог и трећег члана итд. Можемо замислити као да смо кренули од производа $1\cdot 2$, па га транслирали за 1 „удесно", тј. сваки фактор повећали за 1, и тако добили $2\cdot 3$. Потом смо транслирали $2\cdot 3$ и добили именилац $3\cdot 4$ итд. Посматрајући с тог становишта, (5) је сума реципрочних вредности транслата производа од по два суседна члана аритметичког низа $1, 2, 3, \ldots , n, n+1$.

Природно се намеће питање уопштења. Шта ако уместо наведеног имамо општи аритметички низ $a, a+d, \ldots , a+(n-1)d, a+nd$, са првим чланом a и диференцијом d, и ако поново посматрамо реципрочне вредности транслата проoизвода од по два суседна члана тога низа? Чему је једнака сума

$$\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+\cdots+\frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)}\ ?$$

За ту општу суму уведимо ознаку

$$S_{2\ n}^{a\ d}=\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+\cdots+\frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)}\ .$$

Одговор даје

Теорема 1. $S_{2\ n}^{a\ d}=\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+\cdots+\frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)}=\frac{n}{a(a+nd)}$.

Доказ. Како је $\frac{1}{(a+id)(a+(i+1)d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a+id}-\frac{1}{a+(i+1)d}\right)$, следи

$$S_{2\ n}^{a\ d}=\frac{1}{d}\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}\right)+\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+2d}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a+(n-1)d}-\frac{1}{a+nd}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nd}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{nd}{a(a+nd)}=\frac{n}{a(a+nd)}\ .$$

□

Последица 1. $S_{2\ n}^{a\ d}=\frac{1}{(2-1)!\,d^{2-1}}\left(\frac{\binom{2-2}{0}}{a}-\frac{\binom{2-2}{0}}{a+nd}\right)$.

Доказ. Како је, по дефиници, $\binom{0}{0}=1$, следи

$$S_{2\ n}^{a\ d}=\frac{1}{1\cdot d^{1}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nd}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{nd}{a(a+nd)}=\frac{n}{a(a+nd)}\ .$$

□

Приметимо да у специјалном случају $a=1$ и $d=1$ имамо $S_{2\ n}^{1\ 1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, тј суму (5). Према теореми 1 је $S_{2\ n}^{1\ 1}=\frac{n}{1(1+n\cdot 1)}=\frac{n}{n+1}$, што смо знали од раније.

На сличан начин, стављајући $a=1$ и $d=2$, добијамо следећи специјални случај.

Пример 1. $S_{2\ n}^{1\ 2}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

□

Тако смо „средили“ случај транслираних производа од по два суседна члана аритметичког низа. Шта ће бити ако, уместо два, посматрамо производе од по три члана? Размотримо, прво, најпростији случај, а то је низ $1, 2, \ldots, n, n+1, n+2$. По узору на ранију, уведимо ознаку

$$S_{3\,n}^{1\,1} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

што је, заправо, сума (6).

Пример 2. Одредити суму

$$S_{3\,n}^{1\,1} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Решење. Сад је ситуација знатно сложенија од оне за суму (5) и биће нам потребно подоста хеуристике. Прво, приметимо да је

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}.$$

(Како да нам овако нешто падне на памет? Нажалост, нема дефинитивног одговора. То је у домену креативности и маштовитости.)

Затим пробамо и схватимо да исто правило "пролази" и за $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}$, тј.

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}.$$

То нас охрабри да „нападнемо“ и сабирак $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. И стварно,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}.$$

Сада сума $S_{3\,n}^{1\,1}$ прелази у

$$S_{3\,n}^{1\,1} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}\right),$$

односно

$$S_{3\,n}^{1\,1} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1}\right) +$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Након анулирања израза у унутрашњим заградама, остаје

$$S_{3\,n}^{1\,1} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Хеурека!

□

Напомена. Да смо некако докучили да је $S_{3\,n}^{1\,1} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, онда би исправност формуле могли да докажемо и математичком индукцијом. Нека то остане читаоцима за вежбу.

На сличан начин се изводи формула за $S_{3\,n}^{1\,2}$.

Пример 3. Показати да је

$$S_{3\,n}^{1\,2} = \frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5\cdot7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}.$$

□

Размотримо сад општи случај, тј. суму

$$S_{3\,n}^{a\,d} = \frac{1}{a(a+d)(a+2d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)}.$$

Пример 4. Одредити суму

$$S_{3\,n}^{a\,d} = \frac{1}{a(a+d)(a+2d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)}.$$

Упутство. Аналогно примеру 2, наслутимо и покажемо да важи

$$\frac{1}{a(a+d)(a+2d)} = \frac{1}{d^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+2d}\right)$$

$$\frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)} = \frac{1}{d^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+3d}\right)$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)} = \frac{1}{d^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+(n-1)d} - \frac{1}{a+nd} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+(n+1)d}\right).$$

Потом извршимо сумирање и добијемо

$$S_{3\,n}^{a\,d} = \frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+nd} + \frac{1}{a+(n+1)d}\right).$$

□

Последица 2. $S_{3\,n}^{a\,d} = \frac{1}{(3-1)!d^{3-1}}\left[\left(\frac{\binom{3-2}{0}}{a} - \frac{\binom{3-2}{1}}{a+d}\right) - \left(\frac{\binom{3-2}{0}}{a+nd} - \frac{\binom{3-2}{1}}{a+(n+1)d}\right)\right].$

Упутство. Ова формула директно следи из примера 4.

□

Уведимо, даље, ознаке

$$S_{4\,n}^{a\,d} = \frac{1}{a(a+d)(a+2d)(a+3d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)(a+(n+2)d)}$$

$$S_{5\,n}^{a\,d} = \frac{1}{a(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)(a+5d)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)d)(a+nd)(a+(n+1)d)(a+(n+2)d)(a+(n+3)d)}.$$

Сличном методом може се показати да важи

Пример 5.

(а) $S_{4\,n}^{a\,d} = \frac{1}{3!d^3}\left[\left(\frac{\binom{2}{0}}{a} - \frac{\binom{2}{1}}{a+d} + \frac{\binom{2}{2}}{a+2d}\right) - \left(\frac{\binom{2}{0}}{a+nd} - \frac{\binom{2}{1}}{a+(n+1)d} + \frac{\binom{2}{2}}{a+(n+2)d}\right)\right]$;

(б) $S_{5\,n}^{a\,d} = \frac{1}{4!d^4}\left[\left(\frac{\binom{3}{0}}{a} - \frac{\binom{3}{1}}{a+d} + \frac{\binom{3}{2}}{a+2d} - \frac{\binom{3}{3}}{a+3d}\right) - \left(\frac{\binom{3}{0}}{a+nd} - \frac{\binom{3}{1}}{a+(n+1)d} + \frac{\binom{3}{2}}{a+(n+2)d} - \frac{\binom{3}{3}}{a+(n+3)d}\right)\right]$.

Окренимо се сад најопштијем случају, тј. суми реципрочних вредности транслата производа од по k $(k \geq 2)$ суседних чланова општег аритметичког низа. Означимо ту суму са

$$S_{k\,n}^{a\,d} = \frac{1}{a(a+d)\ldots(a+(k-1)d)} + \frac{1}{(a+d)\ldots(a+(k-1)d)(a+kd)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)d)\ldots(a+nd)(a+(n+1)d)(a+(n-k+2)d)}.$$

Посматрајући резултате добијене за $S_{2\,n}^{a\,d}, S_{3\,n}^{a\,d}, S_{4\,n}^{a\,d}, S_{5\,n}^{a\,d}$ (последице 1 и 2 и пример 5) примећујемо аналогију која би могла да важи и за општи случај. Уз помоћ већ коришћене хеуристике наслућујемо да би могла да важи

Теорема 2.

$$S_{k\,n}^{a\,d} = \frac{1}{(k-1)!d^{k-1}}\left[\left(\frac{\binom{k-2}{0}}{a} - \frac{\binom{k-2}{1}}{a+d} + \cdots + (-1)^{k-2}\frac{\binom{k-2}{k-2}}{a+(k-1)d}\right) - \left(\frac{\binom{k-2}{0}}{a+nd} - \frac{\binom{k-2}{1}}{a+(n+1)d} + \cdots + (-1)^{k-2}\frac{\binom{k-2}{k-2}}{a+(n+k-2)d}\right)\right].$$

□

Тачност фомуле за $S_{k\,n}^{a\,d}$ може се доказати математичком индукцијом.

Ако у суми $S_{2\,n}^{1\,1}$ „пустимо" да $n \to \infty$ добијамо бесконачну суму

$$S_{2\,\infty}^{1\,1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Очигледно је $S_{2\,\infty}^{1\,1} = \lim_{n\to\infty} S_{2\,n}^{1\,1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. На сличан начин, из примера 1, 2, 3 добијамо

$$S_{2\,\infty}^{1\,2} = \lim_{n\to\infty} S_{2\,n}^{1\,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$S_{3\,\infty}^{1\,1} = \lim_{n\to\infty} S_{3\,n}^{1\,1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

$$S_{3\,\infty}^{1\,2} = \lim_{n\to\infty} S_{3\,n}^{1\,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{12}.$$

Из теореме 1 и примера 4 добијамо бесконачне суме за опште случајеве

$$S_{2\,\infty}^{a\,d} = \lim_{n\to\infty} S_{2\,n}^{a\,d} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a(a+nd)} = \frac{1}{ad}$$

$$S_{3\,\infty}^{a\,d} = \lim_{n\to\infty} S_{3\,n}^{a\,d} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+nd} + \frac{1}{a+(n+1)d}\right)$$

$$= \frac{1}{2d^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right).$$

Користећи теорему 2 можемо добити бесконачну суму и за најопштији случај

$$S_{k\,\infty}^{a\,d} = \lim_{n\to\infty} S_{k\,n}^{a\,d}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{(k-1)!d^{k-1}}\left[\left(\frac{\binom{k-2}{0}}{a} - \frac{\binom{k-2}{1}}{a+d} + \cdots + (-1)^{k-2}\frac{\binom{k-2}{k-2}}{a+(k-1)d}\right) - \left(\frac{\binom{k-2}{0}}{a+nd} - \frac{\binom{k-2}{1}}{a+(n+1)d} + \cdots + (-1)^{k-2}\frac{\binom{k-2}{k-2}}{a+(n+k-2)d}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!d^{k-1}}\left(\frac{\binom{k-2}{0}}{a} - \frac{\binom{k-2}{1}}{a+d} + \cdots + (-1)^{k-2}\frac{\binom{k-2}{k-2}}{a+(k-1)d}\right)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!d^{k-1}} \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l \frac{\binom{k-2}{l}}{a+ld}.$$

Користећи последњу формулу, можемо добити све могуће специјалне случајеве за различите вредности a, d, k.

За крај, уместо бесконачних сума $S_{2\ \infty}^{1\ 1}$ и $S_{3\ \infty}^{1\ 1}$, посматраћемо њихове алтернативне суме

$$\bar{S}_{2\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

$$\bar{S}_{3\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots .$$

Испоставиће се да су оне повезане трансцедентним бројем $\ln 2$. Само напоменимо, да су трансцедентни они бројеви који нису решење ниједне алгебарске једначине коначног степена с целобројним (или рационалним) коефицијентима.

Пример 6. Показати да је

$$\bar{S}_{2\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = 2\ln 2 - 1 .$$

Решење. Из математичке анализе знамо да је

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2 \tag{7}$$

Већ смо видели да важи идентитет $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. Отуда је

$$\bar{S}_{2\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} - 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{5} - \cdots$$

$$= -1 + 2 - 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} - 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{5} + \cdots$$

$$= -1 + 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right).$$

Узимајући у обзир (7), добијамо $\bar{S}_{2\ \infty}^{1\ 1} = 2\ln 2 - 1$, што је и требало да се покаже.

□

Пример 7. Показати да је

$$\bar{S}_{3\ \infty}^{1\ 1} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots = 2\ln 2 - \frac{5}{4} .$$

Решење. Ако применимо идентитет из решења примера 2, добијамо

$$\bar{S}\,{}^{1\,1}_{3\,\infty} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right)-\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\right).$$

Имајући у виду (7), коначно добијамо

$$\bar{S}\,{}^{1\,1}_{3\,\infty}=\frac{1}{2}\ln 2+(\ln 2-1)+\frac{1}{2}\left(\ln 2-1+\frac{1}{2}\right)=2\ln 2-\frac{5}{4}.$$

□

Најзад, ако у бесконачном аритметичком низу 1, 3, 5, 7, … посматрамо реципрочне вредности транслата, с "кораком" 2, производа од по два суседна члана низа, добијамо суму

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots.$$

Као што ћемо видети, у тој суми се крије π, а то је један од најважнијих бројева у математици, који је такође трансцедентан. (Више о једноставним трансцедентним бројевима може се наћи у [7]).

Пример 8. Показати да је $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots=\frac{\pi}{8}$.

Решење. Из математичке анализе је познато да је

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}. \qquad (8)$$

Како је

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right),$$

из (8) следи

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

□

Литература

[1] Beyer W. H., *CRC Standard Mathematical Tables and Formulas*, CRC Press, 1991.

[2] Blanuša D., *Viša matematika*, I dio, Prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[3] Bronštejn I. N., Semendjajev K.A., *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb 1965.

[4] Brown W. B., *Historical Note on a Reccurent Combinational Problem,* AMM 72, 1965.

[5] Graham L., Knuth D. E., Patasnik O., *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, PC,1994.

[6] Mitrinović D. S., *Zbornik matematičkih problema I*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 1962.

[7] Свирчевић П., *Алгебарске вредности тригонометријских функција,* Настава математике, Иссуе LXI _1-2, Београд 2016.

[8] Svirčević P., *Formule rekurzije za alternativne konačne sume potencija prirodnih brojeva*, Matematičko-fizički list, 3/259, 2014/2015, Zagreb

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2016/17 година