Osječki matematički list 22 (2022), 1–18

Jacobijevi polinomi

Mihaela Ribičić Penava*, Nataša Ujić†

Sažetak

U ovome radu prezentirani su Jacobijevi polinomi, njihova osnovna svojstva i specijalni slučajevi kao što su Legendreovi, Čebiševljevi i Gegenbauerovi polinomi. Osim toga, pokazana je primjena Jacobijevih polinoma pri računanju momenata nekih neprekidnih slučajnih varijabli.

Ključne riječi: *Jacobijevi polinomi, Legendreovi polinomi, Čebiševljevi polinomi, Gegenbauerovi polinomi, momenti*

Jacobi polynomials

Abstract

In this paper, Jacobi polynomials, their basic properties and certain special cases, such as Legendre, Chebyshev and Gegenbauer polynomials, are presented. In addition, the application of Jacobi polynomials in the computation of moments of continuous random variables is shown.

Keywords: *Jacobi polynomials, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials, Gegenbauer polynomials, moments*

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: mihaela@mathos.hr
†Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: nujic@mathos.hr

1 Osnovni pojmovi


Adrien-Marie Legendre (1752.–1833.), francuski matematičar

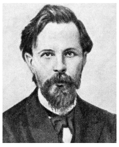
Prvi klasični ortogonalni polinomi pojavljuju se u djelu francuskog matematičara A. M. Legendrea. On je 1784. godine u radu *Recherches sur la figure des planètes* predstavio polinome koji su, njemu u čast, nazvani Legendreovi polinomi. U 19. stoljeću došlo je do generalizacije ortogonalnih polinoma, a značajniji interes za njihovim proučavanjem javio se u radovima matematičara P. L. Čebiševljeva, A. A. Markova i T. J. Stieltjesa.


Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821.–1894.), ruski matematičar

Definicija 1.1. *Niz polinoma $p_0, p_1, p_2, \ldots$, pri čemu je p_i polinom stupnja $i \in \mathbb{N}_0$, ortogonalan je na segmentu $[a, b]$ ukoliko zadovoljava uvjet ortogonalnosti*

$$\langle p_i, p_j \rangle_w = \int_a^b w(x) p_i(x) p_j(x)\, dx = 0,$$

za $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}_0$, s obzirom na pripadnu težinsku funkciju w, $w(x) \geq 0$, za svaki $x \in [a, b]$.


Andrey Andreyevich Markov (1856.–1922.), ruski matematičar

Napomena 1.1. *Slično možemo definirati ortogonalni niz polinoma na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$, koji je domena pripadne težinske funkcije w.*

Razvojem matematike, ali i drugih srodnih znanosti, pokazalo se da ortogonalni polinomi imaju širok spektar primjena u razim područjima matematike i fizike. U nastavku ćemo proučavati Jacobijeve polinome, koji pripadaju klasičnim ortogonalnim polinomima, i njihove primjene u teoriji vjerojatnosti. Više informacija o ortogonalnim polinomima može se pronaći u [1], [3], [5] i [11]. U ovom ćemo dijelu samo ukratko navesti rezultate koji će nam kasnije biti potrebni.


Thomas Joannes Stieltjes (1856.–1894.), nizozemski matematičar

Familiju ortogonalnih polinoma stupnja n, $n \in \mathbb{N}_0$, u nastavku ćemo označavati s $\{p_n(x),\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Tako definirana familija na segmentu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0$, za svaki $x \in [a, b]$, zadovoljava Rodriguesovu formulu

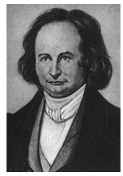
$$p_n(x) = \frac{1}{e_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[w(x) (g(x))^n \right], \tag{1}$$


Benjamin Olinde Rodrigues (1795.–1851.), francuski matematičar i bankar

pri čemu konstanta e_n i polinom g ovise o vrsti ortogonalnih polinoma. Formulu (1) predstavio je O. Rodrigues. U početku je ona definirana za Legendreove polinome, no kasnije je poopćena i za druge vrste ortogonalnih polinoma.

2 Jacobijevi polinomi

Jacobijevi polinomi, u oznaci $P_n^{(\alpha,\beta)}$, pripadaju klasičnim ortogonalnim polinomima. Definirani su na na segmentu $[-1, 1]$ s obzirom na težinsku funkciju w, $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$. Predstavio ih je C. G. Jacobi te su po njemu i nazvani. U nastavku ćemo dati osnovne informacije o Jacobijevim polinomima, dokazati neka svojstva koja zadovoljavaju te pokazati njihovu primjenu u teoriji vjerojatnosti.



Carl Gustav Jacobi (1804.–1851.), njemački matematičar

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Jacobijevi polinomi definirani su formulom

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right], \qquad (2)$$

što je upravo zapis pomoću Rodriguesove formule (1).

Primijenom Leibnizovog pravila[1] na prethodni izraz slijedi:

$$\begin{aligned}
&(-2)^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^{n+\alpha}\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{n+\beta}\\
&\quad = (-1)^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Time smo dobili eksplicitnu formulu za Jacobijeve polinome stupnja $n \in \mathbb{N}_0$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}. \qquad (3)$$

Iz prethodnog zapisa lako uočavamo da je vodeći koeficijent polinoma $P_n^{(\alpha,\beta)}$ stupnja n jednak

$$2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k},$$

što sređivanjem daje

$$2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}.$$

[1] Ako su funkcije f i g n-puta derivabilne, tada je i njihov produkt n-puta derivabilna funkcija čija je n-ta derivacija dana izrazom $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, gdje je $f^{(i)}$ i-ta derivacija funkcije f.

Napomena 2.1. *Kako se ortogonalni polinomi mogu zapisati pomoću odgovarajućih funkcija izvodnica, navodimo funkciju izvodnicu za Jacobijeve polinome*

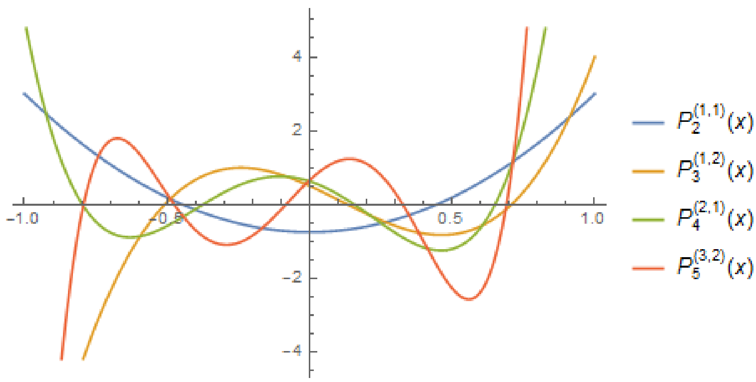
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)z^n = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta},$$

gdje je $R = R(x,z) = \sqrt{1-2xz+z^2}$*. Ovu funkciju izveo je Jacobi, a izvod se može pronaći u* [5, *str. 144*] *ili* [11, *str. 69*].

Navedimo sada prvih nekoliko Jacobijevih polinoma:

$$\begin{aligned}
P_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1,\\
P_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2}\left[2(\alpha+1)+(\alpha+\beta+2)(x-1)\right],\\
P_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{8}[4(\alpha+1)_2+4(\alpha+\beta+3)(\alpha+2)(x-1)\\
&\quad+(\alpha+\beta+3)_2(x-1)^2].
\end{aligned}$$

Koeficijenti za generiranje Jacobijevih polinoma proizvoljnog stupnja mogu se pronaći u [1, str. 793], a ovdje ih nećemo posebno navoditi zbog veličine zapisa. Na slici 1 prikazani su grafovi Jacobijevih polinoma $P_2^{(1,1)}$, $P_3^{(1,2)}$, $P_4^{(2,1)}$ i $P_5^{(3,2)}$.



Slika 1. Grafički prikaz Jacobijevih polinoma

U nastavku ćemo dokazati osnovna svojstva Jacobijevih polinoma. Za početak, uvjerimo se da za Jacobijeve polinome zaista vrijedi formula

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x). \tag{4}$$

Naime, uvrštavanjem $-x$ u izraz (3) dobivamo:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (-x-1)^k (-x+1)^{n-k}$$

$$= 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (-1)^k (x+1)^k (-1)^{n-k} (x-1)^{n-k}$$

$$= (-1)^n 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

$$= (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

Nadalje, iz

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$$

i (4) direktno slijedi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

Deriviranjem izraza (3) dobivamo

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\alpha+\beta+n+1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

dok se derivacije višeg reda dobivaju uzastopnim deriviranjem po varijabli x, a računaju se prema formuli

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+\beta+n+1)_k}{2^k} P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x).$$

Osim toga, Jacobijevi polinomi su rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugoga reda

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

2.2 Rekurzivne relacije

Jacobijevi polinomi zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) p_n(x) - c_n p_{n-1}(x), \; n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Navedena relacija u literaturi je poznata pod nazivom tročlana rekurzija. Za Jacobijeve polinome, koeficijenti rekurzije dani su sljedećim izrazima:

$$a_n = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)},$$

$$b_n = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+n+1)},$$

$$c_n = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Više informacija o tročlanoj rekurziji za Jacobijeve polinome može se pronaći u [5, str. 145]. Uočimo kako rekurzija (5) vrijedi i za $n = 0$, no tada se dogovorno uzima $p_{-1}(x) = 0$. Osim toga, vrijedi $p_0(x) = 1$.

Navedimo još neke rekurzivne relacije za Jacobijeve polinome (za više informacija pogledati [1, str. 782]):

$$(1-x)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) + (1+x)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x) = 2P_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = (n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$(2n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) = (n+\alpha+\beta)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x) - P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x) = P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

2.3 Specijalni slučajevi

Jacobijevi polinomi mogu se povezati s ostalim klasama ortogonalnih polinoma, i to na vrlo elegantan način. Naime, dovoljno je fiksirati indekse α i β te pomnožiti tako odabrani Jacobijev polinom unaprijed definiranom konstantom.

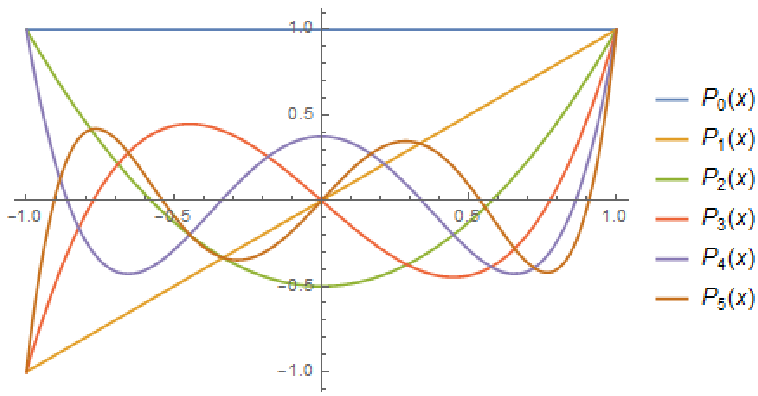
Najjednostavnija je veza između Jacobijevih i Legendreovih polinoma. Legendreovi polinomi, u oznaci P_n, dobiju se kao poseban slučaj Jacobijevih polinoma za $\alpha = \beta = 0$, odnosno

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x).$$

Iz navedenog izraza lako možemo izračunati prvih nekoliko Legendreovih polinoma:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\
P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\
P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \\
P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x.
\end{aligned}$$

Grafovi navedenih polinoma prikazani su na slici 2.



Slika 2. Grafički prikaz Legendreovih polinoma

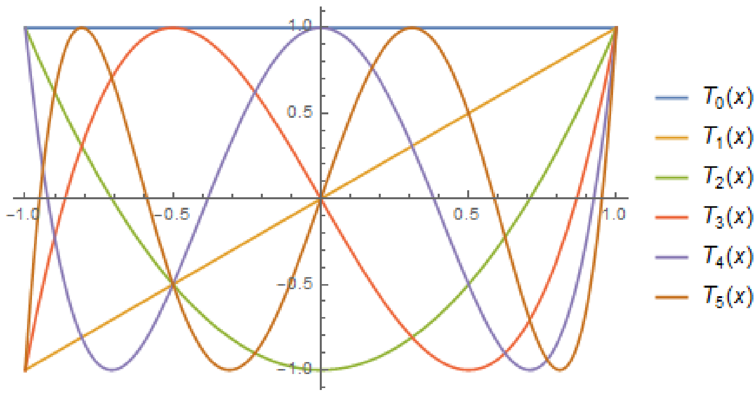
Čebiševljevi polinomi prve vrste, u oznaci T_n, su poseban slučaj Jacobijevih polinoma za $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, tj. imamo sljedeći izraz:

$$T_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

Prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma prve vrste navedeno je u nastavku:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x,
\end{aligned}
$$

a grafički su prikazani na slici 3.



Slika 3. Grafički prikaz Čebiševljevih polinoma prve vrste

Slično računamo i Čebiševljeve polinome druge vrste, u oznaci U_n. Njih dobivamo odabirom $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, tj.

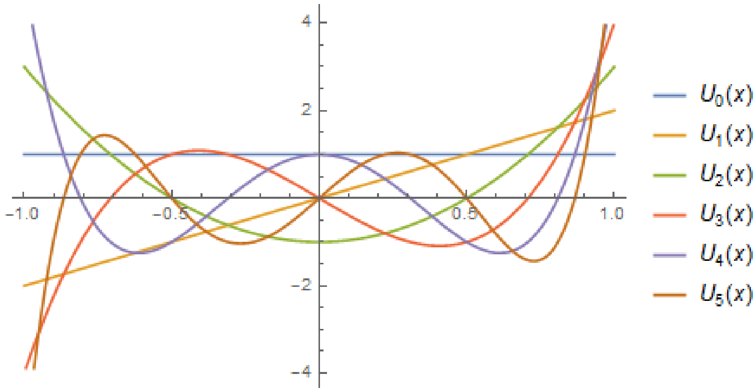
$$
U_n(x) = 2^{2n} \binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}.
$$

Prvih šest Čebiševljevih polinoma druge vrste dano je sljedećim izrazima:

$$
\begin{aligned}
U_0(x) &= 1,\\
U_1(x) &= 2x,\\
U_2(x) &= 4x^2 - 1,\\
U_3(x) &= 8x^3 - 4x,\\
U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1,
\end{aligned}
$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x.$$

Na slici 4 prikazani su grafovi prethodno navedenih polinoma.



Slika 4. Grafički prikaz Čebiševljevih polinoma druge vrste

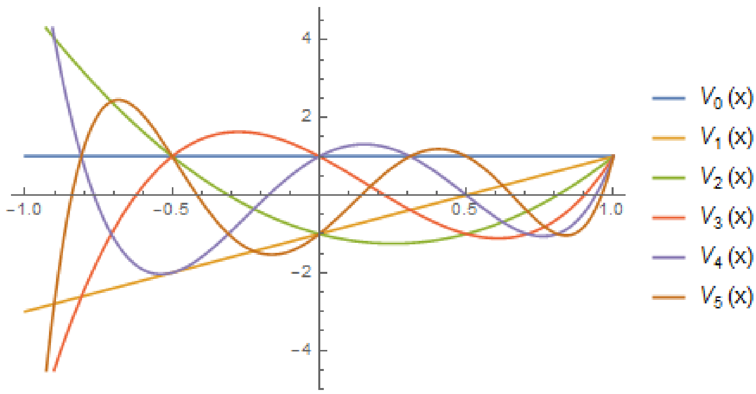
Čebiševljevi polinomi treće vrste, u oznaci V_n, dobiju se za $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{2}$, a njihova veza s Jacobijevim polinomima dana je izrazom

$$V_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma treće vrste:

$$\begin{aligned}
V_0(x) &= 1,\\
V_1(x) &= 2x - 1,\\
V_2(x) &= 4x^2 - 2x - 1,\\
V_3(x) &= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1,\\
V_4(x) &= 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1,\\
V_5(x) &= 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1.
\end{aligned}$$

Navedeni Čebiševljevi polinomi treće vrste prikazani su na slici 5.



Slika 5. Grafički prikaz Čebiševljevih polinoma treće vrste

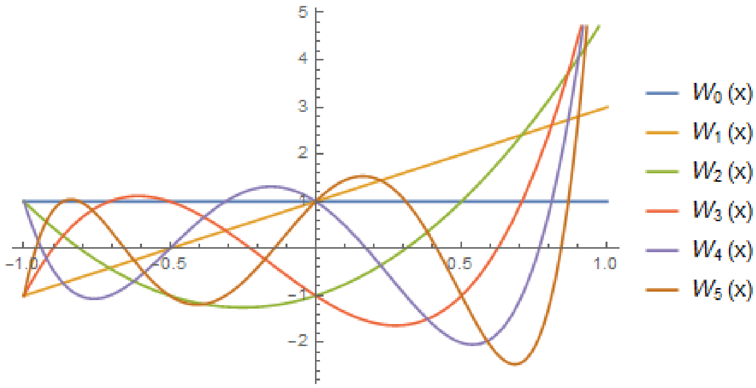
Slično Čebiševljevim polinomima treće vrste, za $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta = -\frac{1}{2}$ dobivamo Čebiševljeve polinome četvrte vrste, u oznaci W_n:

$$W_n(x) = 2^{2n} \binom{2n}{n}^{-1} P_n^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma četvrte vrste:

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= 1, \\
W_1(x) &= 2x + 1, \\
W_2(x) &= 4x^2 + 2x - 1, \\
W_3(x) &= 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1, \\
W_4(x) &= 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1, \\
W_5(x) &= 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1.
\end{aligned}$$

Navedeni Čebiševljevi polinomi četvrte vrste prikazani su na slici 6.



Slika 6. Grafički prikaz Čebiševljevih polinoma četvrte vrste

Još jedan specijalan slučaj Jacobijevih polinoma su Gegenbauerovi polinomi, u oznaci C_n^λ. Možemo ih dobiti uvrštavanjem $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, pri čemu vrijedi $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$. Dakle,

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(x),$$

gdje je $(m)_n$ Pochhammerov simbol[2]. Koristeći svojstvo $(m)_n = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, gdje je Γ oznaka za gama funkciju[3], dobivamo zapis koji je nešto zastupljeniji u literaturi:

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Navedimo prvih nekoliko Gegenbauerovih polinoma:

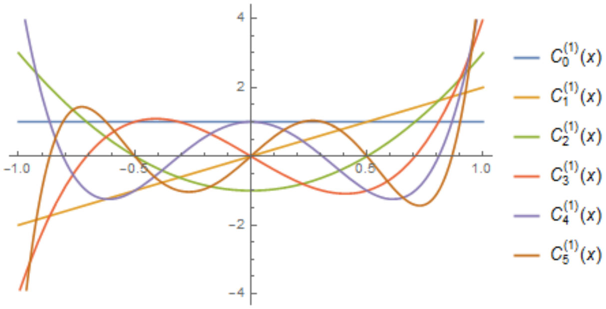
$$\begin{aligned} C_0^\lambda(x) &= 1, \\ C_1^\lambda(x) &= 2\lambda x, \\ C_2^\lambda(x) &= -\lambda + 2(\lambda)_2 x^2, \end{aligned}$$

[2]Pochhammerov simbol ili rastući faktorijel, u oznaci $(m)_n$, definiran je izrazom $(m)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(m+i)$, za $m \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}_0$.

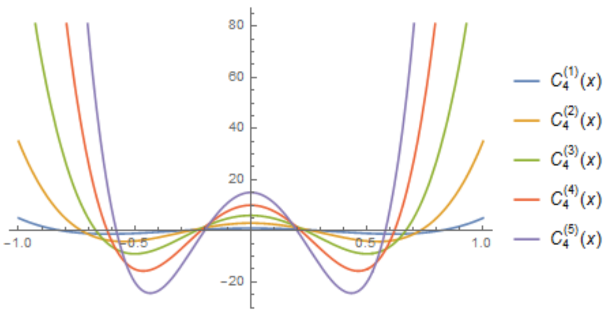
[3]Više detalja o gama funkciji može se pronaći u [6] i [8].

$$C_3^\lambda(x) = -2(\lambda)_2 x + \frac{4}{3}(\lambda)_3 x^3,$$
$$C_4^\lambda(x) = \frac{1}{2}(\lambda)_2 - 2(\lambda)_3 x^2 + \frac{2}{3}(\lambda)_4 x^4,$$
$$C_5^\lambda(x) = (\lambda)_3 x - \frac{4}{3}(\lambda)_4 x^3 + \frac{4}{15}(\lambda)_5 x^5.$$

Slike 7 i 8 prikazuju Gegenbauerove polinome proizvoljnog stupnja n i indeksa λ.



Slika 7. Gegenbauerovi polinomi $C_n^1(x)$ za $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



Slika 8. Gegenbauerovi polinomi $C_4^\lambda(x)$ za $\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Više detalja o prezentiranim specijalnim slučajevima Jacobijevih polinoma i njihovim primjenama može se pronaći u [5] i [12].

2.4 Primjena kod računanja momenata

Računanje očekivanja i varijance preko definicije za zadanu distribuciju može biti izrazito mukotrpan posao, koji uvelike ovisi o složenosti danog izraza. Taj postupak znatno se može olakšati korištenjem ortogonalnih polinoma. Pomoću njih možemo jednostavnijim računom doći do očekivanja i varijance, ali i ostalih momenata (ukoliko postoje) zadane distribucije. U nastavku ćemo pokazati kako se Jacobijevi polinomi mogu upotrijebiti prilikom računanja momenata beta distribucije, čiji momenti svakoga reda postoje. Prije samoga računa navest ćemo definiciju n-tog momenta neprekidne slučajne varijable.

Definicija 2.1. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X. Ako je integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f_X(x)\, dx$$

konačan, onda kažemo da slučajna varijabla X ima n-ti moment i broj

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx$$

zovemo n-ti moment neprekidne slučajne varijable X.

Specijalno, za $n = 1$, prvi moment nazivamo očekivanje slučajne varijable.

Osim toga, ako je g realna funkcija realne varijable, onda očekivanje slučajne varijable $g(X)$ možemo računati na sljedeći način:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx.$$

Iz navedenoga slijedi da matematičko očekivanje ima svojstvo linearnosti[4]. Slijedi definicija beta distribucije.

Definicija 2.2. *Za fiksne $\alpha, \beta > 0$, neprekidna slučajna varijabla X ima beta distribuciju s parametrima α i β ako joj je funkcija gustoće zadana izrazom*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}, & x \in \langle 0, 1\rangle \\ \\ 0, & \textit{inače}, \end{cases}$$

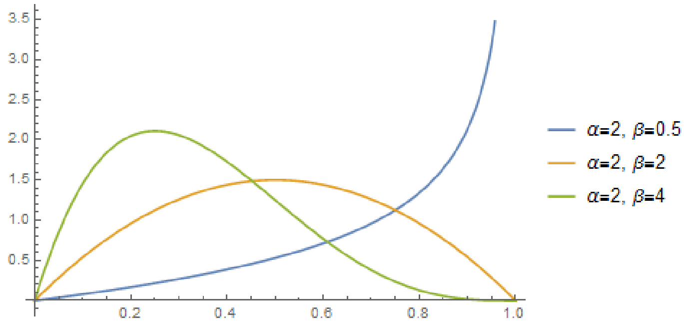
gdje je $\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$ beta funkcija[5].

[4]Za realne funkcije realne varijable $g_1, g_2, \ldots, g_m$ i brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vrijedi

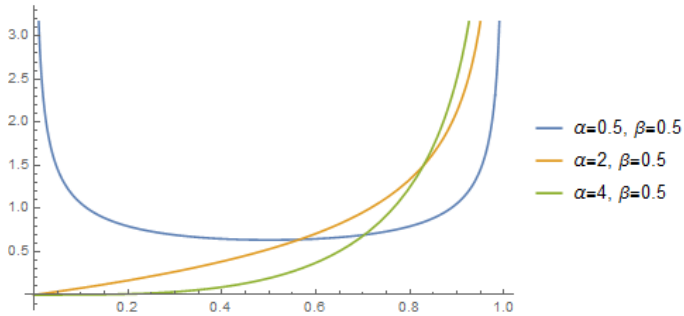
$$E\left[\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(X)\right] = \sum_{i=1}^{m} a_i E\left[g_i(X)\right].$$

[5]Više informacija o beta funkciji dostupno je u [8].

Na Slici 9 prikazani su grafovi funkcije gustoće beta distribucije za fiksirane parametre α i β.



(a) $\alpha = 2, \beta \in \{0.5, 2, 4\}$



(b) $\alpha \in \{0.5, 2, 4\}, \beta = 0.5$

Slika 9. Grafovi funkcije gustoće beta distribucije

Kako je, prema prethodnoj definiciji, funkcija gustoće beta distribucije definirana na segmentu $[0,1]$, koristit ćemo sljedeći izraz za generiranje Jacobijevih polinoma:

$$P_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha-1}{k} \binom{n+\beta-1}{n-k} (x-1)^k x^{n-k}. \qquad (6)$$

Uočimo da smo time definirali Jacobijeve polinome na segmentu $[0,1]$, za razliku od izraza (2) ili (3), gdje su definirani na segmentu $[-1,1]$. Osim toga, možemo ih definirati i rekurzivnom relacijom koja vrijedi za ortonormirane polinome

$$\tilde{p}_{n+1}(x) = -\frac{1}{a_n}\left[(b_n - x)\tilde{p}_n(x) + a_{n-1}\tilde{p}_{n-1}(x)\right],\ n \geq 1, \tag{7}$$

pri čemu su koeficijenti dani izrazima:

$$a_n = \sqrt{\frac{(n+1)(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)^2(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n+1)}},$$

$$b_n = \frac{\alpha^2+\alpha\beta+2(\alpha+\beta)n+2n^2-2\alpha-2n}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)},$$

i vrijedi $\tilde{p}_{-1}(x) = \tilde{p}_0(x) = 1$.

Navedimo prva dva Jacobijeva polinoma definirana prethodnim izrazom:

$$P_1^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) = \sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}\left[(\alpha+\beta)x - \alpha\right],$$

$$\begin{aligned} P_2^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}&[(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)x^2 \\ &-2(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)x + \alpha(\alpha+1)]. \end{aligned}$$

Ako su p_i i p_j dva ortonormirana polinoma te f_X funkcija gustoće beta distribucije, onda vrijedi:

$$E[p_i(X)p_j(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(x)p_j(x)f_X(x)\,dx = \delta_{ij}, \tag{8}$$

pri čemu je $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ Kroneckerov simbol.

Budući da smo ranije naveli da za ortonormirane polinome vrijedi da je $p_0(x) = 1$, iz (8) slijedi da je za $j = 0$

$$E[p_i(X)] = 0. \tag{9}$$

Izračunajmo sada očekivanje beta distribucije koristeći Jacobijeve polinome definirane izrazom (6), jednakost (9) i svojstvo linearnosti:

$$E\left[P_1^{(\alpha-1,\beta-1)}(X)\right] = 0$$

$$E\left[\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}((\alpha+\beta)X-\alpha)\right]=0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}\;E[(\alpha+\beta)X-\alpha]=0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}(\alpha+\beta)E[X]-\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}\alpha=0$$

$$E[X]=\frac{\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}\alpha}{\sqrt{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}(\alpha+\beta)}$$

$$E[X]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Za računanje varijance koristit ćemo sljedeću formulu[6]:

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2.$$

Iz prethodnog raspisa direktno slijedi da je

$$(E[X])^2=\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}, \tag{10}$$

pa nam još preostaje izračunati drugi moment, tj. $E[X^2]$. Imamo:

$$E\left[P_2^{(\alpha-1,\beta-1)}(X)\right]=0$$

$$\begin{aligned}E\Bigg[\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}&((\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)X^2\\ &-2(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)X+\alpha(\alpha+1))\Bigg]=0\end{aligned}$$

[6]Navedena formula rezultat je činjenice da je varijanca drugi centralni moment, a dokaz se može pronaći u [2, str. 93].

$$\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}E\left[(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)X^2 - 2(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)X+\alpha(\alpha+1)\right]=0$$

$$\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}((\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)E[X^2] - 2(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)E[X]+\alpha(\alpha+1))=0$$

$$\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)E[X^2] - \sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta+2)}{\alpha+\beta}=0$$

$$E[X^2]=\frac{\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}\ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta+2)}{\alpha+\beta}}{\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}}(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}$$

$$E[X^2]=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

Sada možemo izračunati varijancu:

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}-\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta)-\alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Računanje još nekih momenata detaljno je prikazano u [7].

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1964.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1978.

[4] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[5] B. G. S. Doman, *The Classical Orthogonal Polynomials*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2016.

[6] T. Milas, M. Ribičić Penava, K. Sabo, *Primjene gama funkcije*, Osječki matematički list, **21** (2021), 1-18

[7] M. Pušić, *Pearsonove distribucije*, diplomski rad, Osijek, 2012.

[8] M. Ribičić Penava, D. Škrobar, *Gama i beta funkcije*, Osječki matematički list, **15** (2015), 93-111

[9] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[10] S. Singer, *Numerička matematika*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2008., (javno dostupno: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/`)

[11] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, 1939.

[12] N. Ujić, *Gegenbauerovi polinomi*, završni rad, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2021.