Numerička ograničenja kineskog abakusa

Ivan Matić[*], Domagoj Ševerdija[†], Sofija Škorvaga[‡]

Sažetak. *Opisujemo provođenje računskih operacija na kineskom abakusu te detaljno izvodimo njihova numerička ograničenja.*

Ključne riječi: *abakus, tehnike računanja, ograničenja pri računanju*

Numerical bounds of chinese abacus

Abstract. *We describe the implementation of the fundamental computations on chinese abacus, including adition, subtraction, multiplication and divison. Also, we give precise and explicit bounds for using listed operations.*

Key words: *abacus, calculation technics, bounds for computation*

1. Uvod

Jeste li ikad čuli za abakus? Abakus je zabavna napravica za vježbanje matematike, poznatija kao prvo prijenosno računalo. S njim se može brzo i lako naučiti računanje u sustavima različitih baza, služi boljem razumijevanju brojeva te efikasno razvija računanje napamet, tj. abakus se pokazuje kao savršeno pomagalo u razvijanju takozvanog slijepog računanja. Zasigurno pripada među najbolje naprave na svijetu, no mnogi od vas će postaviti pitanje : "Zašto da učim računati s abakusom, kad imam kalkulator?" Ili: "Zašto su najveći proizvođači kalkulatora Kinezi, a mnogi od njih sami koriste abakus?" Razlozi su jednostavni: Korištenje abakusa naučit će vas jednostavnijoj manipulaciji s brojevima; lakše ćete uvidjeti povezanost znamenki i svoje ćete znanje iskoristiti u razumijevanju osnovnih matematičkih operacija - zbrajanju, oduzimanju, množenju i dijeljenju. Također ćete naučiti kako funkcionira bazni sustav, a osim toga možete koristiti abakus za računanje osnovnih operacija i u binarnom sustavu (kojega koristimo u informatici).

Je li teško naučiti koristiti abakus? Naravno da nije, nego je puno lakše od načina na koji su vas (nekada davno) učili računati. Uvjerit ćemo vas u to vrlo skoro.

[*]Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31 000 Osijek, ivan.matic@mathos.hr

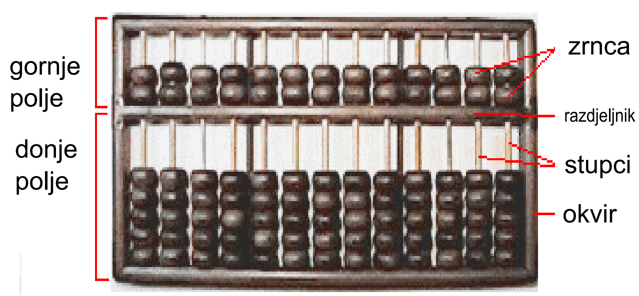
[†]Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31 000 Osijek, domagoj.severdija@mathos.hr

[‡]Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku,Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31 000 Osijek, sofija.skorvaga@mathos.hr

Gdje se danas koristi abakus? Abakus se i danas koristi za računanje u zemljama srednjeg istoka, Japanu, Kini i mnogim dijelovima Rusije, pretežno azijskim. Namijenjen je za pripomoć trgovcima i poreznicima, poglavito onima koji su prije abakusa koristili kamenčiće kako bi imali jasne račune. Abakus igra važnu ulogu u podučavanju djece osnovnoškolske dobi fundamentalnim matematičkim operacijama, izrazito je praktičan iz više razloga: učenici izračunavaju matematičke probleme brže te im treba kraće vremena za ponovno rješavanje, ako su napravili grešku u izračunu. Možda i najvažnije - abakus pruža mogućnost djeci da steknu vještine rješavanja nekog problema.

Ima li abakus i drugih prednosti? Kad vam istekne baterija od kalkulatora nemate sačuvani rezultat. Ako stavite abakus pokraj fiksnog telefona može vam poslužiti za bilježenje novog telefonskog broja.

Ljudi često potcjenjuju moć te naizgled primitivne sprave i koriste elektronički kalkulator. Možemo promatrati te dvije naprave kao dva različita kraja svemira, od kojih oba imaju prednosti i mana. Pomalo je čudno kad saznamo da je moderni elektronički kalkulator kojega danas koristimo osmišljen upravo iz vrlo sličnog koncepta iz kojeg je izveden i abakus. Abakus je u potpunosti mehanička spravica i možemo biti potpuno sigurni da nikada neće podbaciti ili pogriješiti sve dok sami ne pogriješimo. U suštini možemo reći da je elektronički kalkulator nastao od abakusa i različitih ideja korištenih za abakus.



Slika 1. Tradicionalni kineski abakus sa 13 stupaca.

No, svatko okrenut matematici će se prilikom korištenja abakusa vrlo brzo zapitati s koliko velikim brojevima smo u mogućnosti računati. Iako se u edukativnoj literaturi i na internetu mogu pronaći brojna uputstva za korištenje najrazličitijih tipova abakusa (kao na primjer [4]), izgleda kako se do sada ljudi nisu mnogo bavili tim pitanjem. Upravo iz toga razloga, nakon opisa samog abakusa i pripadnih računskih operacija, u posljednjem poglavlju, koje predstavlja jezgru ovog rada, nastojimo dati što precizniji odgovor na pitanje o numeričkim ograničenjima prilikom rada s kineskim abakusom.

Iako postoje brojni tipovi abakusa, kao što su ruski, japanski, rimski ili školski, odlučili smo se u ovom radu baviti najrasprostranjenijim - kineskim abakusom. Naravno, svi provedeni postupci se mogu na prirodan način generalizirati i na druge tipove abakusa, jer svi funkcioniraju prema vrlo sličnim principima.

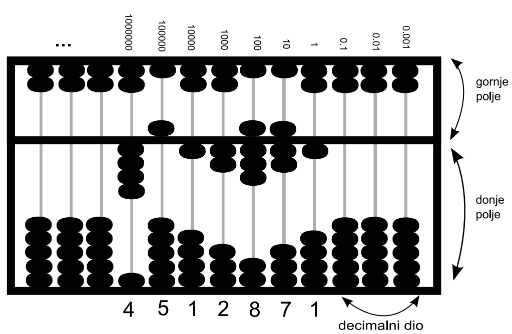
Izloženi rad je započet tijekom priprema autora za radionicu održanu u sklopu Festivala znanosti 2009. na Odjelu za matematiku u Osijeku. Na toj radionici su autori učenicima osnovnih i srednjih škola prezentirali korištenje kineskog abakusa, što je kod učenika pobudilo primjetan interes. Napomenimo kako je tema spomenutog Festivala znanosti bila evolucija te je, shodno tome, abakus predstavljen kao primjer napretka i evoluiranja računskih pomagala. Autori koriste ovu priliku kako bi izrazili svoju zahvalnost kolegici Ljerki Jukić, prof., za prijedlog teme, jer bez toga od ovoga rada vjerojatno ne bi bilo nastalo mnogo.

2. Prikaz brojeva na abakusu

Prikaz brojeva na abakusu podrazumijeva zapis brojeva iz pozicijskog brojevnog sustava. Na klasičnom kineskom abakusu se na jednostavan način prikazuju brojeve dekadskog sustava. Dakle, brojevi mogu biti prirodni ili decimalni. Prigodna programska podrška koji ilustrira prikaz brojeva i operacije na abakusu se može naći u [3]. Nadalje ćemo, jednostavnosti radi, umjesto kineski abakus pisati samo abakus.

Postupak. Svaki stupac abakusa predstavlja određenu dekadsku težinu. Prvotno korisnik odredi koliko stupaca će predstavljati decimalni dio broja i njih će odabrati na desnom kraju abakusa (najčešće se uzmu 3 stupca). Nakon toga, raspoređuje na svaki stupac s lijeva na desno *jedinice, desetice, stotice, ...* Svaka znamenka broja će biti zapisana na odgovarajućem stupcu. Uočite da klasični kineski abakus (*Sl. 1.*) ima 2 polja: *gornje i donje polje.* U donjem polju su stupci koje sadrže 5 zrnaca s vrijednošću 1, pomoću kojih možemo predstaviti znamenke $0, 1, 2, 3, 4$ (jedno zrnce, *kontrolno*, uvijek mora biti ostavljeno). U gornjem polju imamo stupce koje sadrže 2 zrnca, svako s vrijednošću 5. Kombinirajući donje i gornje polje, možemo predstaviti ostale znamenke $5, 6, 7, 8, 9$ (zadržavamo jedno kontrolno zrnce i u gornjem polju). Promotrimo u primjeru:

Primjer 1. *Zapis prirodnog broja 4512871 prikazan je na* Slici 2..



Slika 2. Uočite da smo za prikaz $5 = 0 + 5, 7 = 2 + 5, 8 = 3 + 5$ morali koristiti donje i gornje polje, dok je za ostale znamenke $1 = 1 + 0, 4 = 4 + 0, 2 = 2 + 0$ dovoljno bilo koristiti donje polje.

3. Operacije na abakusu

Moramo naglasiti da je postupak zbrajanja i oduzimanja vrlo sličan postupku kako smo naučili i na papiru. Prednost operacija na abakusu je što se operandi ne moraju svi zapisivati, već možemo direktno s njima operirati.

3.1. Zbrajanje

Radi jednostavnosti razmatranja zapišimo prvi i drugi pribrojnik u obliku

$$a = \overline{a_k \dots a_1}, \quad b = \overline{b_l \dots b_1}, \quad k, l \text{ broj znamenki od } a \text{ odnosno } b \tag{1}$$

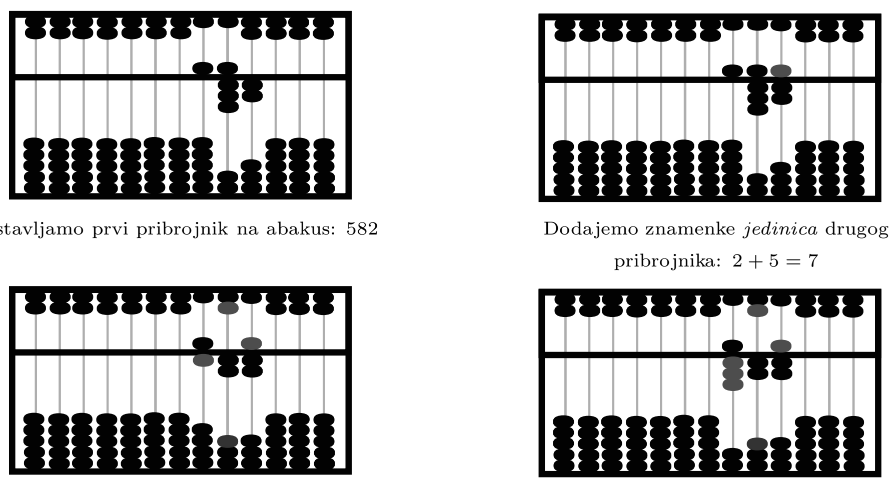
gdje su a_i, b_i znamenke u brojevima a, b i oznaka (a_i) će nam predstavljati odgovarajući i-ti stupac abakusa. Postupak zbrajanja na abakusu je da se prvo zapiše prvi pribrojnik, a zatim drugi 'nadodaje' prvom. Možemo krenuti s lijeva na desno.
Postupak. Znamenki jedinica a_1 prvog pribrojnika dodajemo znamenku jedinica b_1 prvog pribrojnika. Moguća su 2 scenarija:

a) $a_1 + b_1 < 10$, u tom slučaju $a_1 + b_1$ može biti zapisan na stupcu (a_1).

b) $a_1 + b_1 \geq 10$, u tom slučaju zbroj ne možemo zapisati na jednom stupcu. Vršimo prijenos na drugi stupac (a_2) tako da dodamo 1. Uočite da smo tako previše dodali, što nadoknadimo tako da oduzmemo sa (a_1) stupca $10 - b_1$.

Nadalje, analogan postupak nastavljamo slijedno, tj. b_i dodajemo a_i za $i = 2, 3, \dots, l$ (možemo uzeti da je $l \leq k$) zajedno sa prijenosima koje se nađu na stupcima (a_i). Ilustracije radi, promotrimo na primjeru:

Primjer 2. *Zbroj brojeva 582 i 245 prikazan je na* Slici. 3.



Postavljamo prvi pribrojnik na abakus: 582

Dodajemo znamenke *jedinica* drugog pribrojnika: $2 + 5 = 7$

Dodajemo znamenke *desetica* drugog pribrojnika: $8 + 4 = 2(+1$ prijenos)

Dodajemo znamenke *stotica* drugog pribrojnika: $5(+1) + 2 = 8$

Slika 3. Koraci u zbrajanju brojeva na abakusu (sa sivom bojom su označena zrnca koje pomičemo)

3.2. Oduzimanje

Postupak oduzimanja je vrlo sličan postupku zbrajanja, s time što ne vršimo prijenos, već posudbu. Za potrebe razmatranja pretpostavljamo da je $a > b$ i zanima nas računanje $a - b$ na abakusu, gdje su a, b prikazani na način (2). Postupak obavljamo s lijeva na desno. Promotrimo osnovni korak, tj. oduzimanje b_1 od a_1. Ponovo, imamo 2 slučaja:

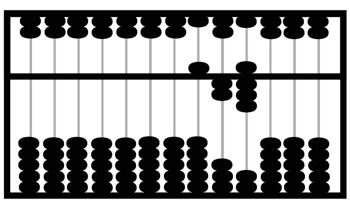
a) U slučaju $a_1 \geq b_1$ oduzmemo b_1 zrnaca sa stupca (a_1)

b) U protivnom slučaju, kad je $a_1 < b_1$ moramo načiniti posudbu sa stupca a_2. Oduzimamo 1 sa stupca (a_2). Time smo na neki način previše oduzeli, pa to nadoknadimo na stupcu (a_1) tako da dodamo $10 - b_1$.

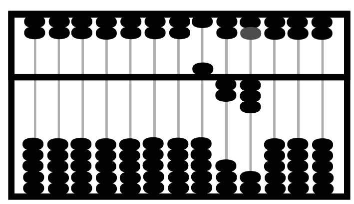
Postupak možemo sada analogno obavljati na preostalim stupcima $(a_i), i = 2 \ldots, k$ s napomenom da oduzimamo od trenutnog stanja koje se nalazi na pojedinom stupcu (znamenka a_i umanjeno za prijenos).

Ilustracije radi, promotrimo primjer:

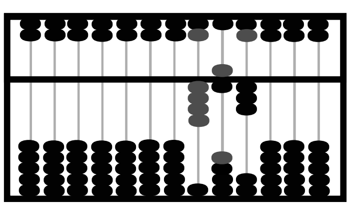
Primjer 3. *Razlika brojeva* $528 - 365$ *prikazan je na* Slici 4.



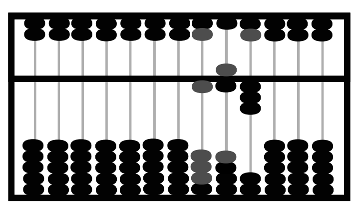
Postavljamo umanjenik na abakus: 528



Oduzimamo od znamenke *jedinice* umanjenika *jedinicu* umanitelja: $8 - 5 = 3$



Oduzimamo od znamenke *desetice* umanjenika *deseticu* umanjitelja s posudbom: $(1)2 - 6 = 6$



Oduzimamo znamenke *stotica*: $5(-1) - 3 = 1$

Slika 4. Koraci u oduzimanju brojeva na abakusu (sa sivom bojom su označena zrnca koje pomičemo)

3.3. Množenje

Opisat ćemo postupak množenja na abakusu. Za potrebe toga postoje dva uvjeta: poznavanje tablice množenja i poznavanje zbrajanja na abakusu.

Iako se množenje prirodnih brojeva, koje i jest ono što nas interesira, generalno može smatrati skraćenim zbrajanjem, pri ovom postupku su ipak potrebni neki dodatci.

Osnovni razlog tome je što negdje moramo imati zapisane faktore, tj. negdje pred nama se moraju nalaziti brojevi koje množimo. Koliko god se trudili, teško je koncentrirano vršiti računske operacije i u svakom trenutku imati pregled nad potrebnim znamenkama ukoliko nam nisu eksplicitno predočene.

Kako čitavo vrijeme želimo standardne postupke računanja na papiru prenijeti na abakus, tako će se i množenje vršiti znamenku po znamenku. Iako nam prilikom zbrajanja zapisivanje sumanada nije bilo potrebno, množenje višeznamenkastih brojeva je znatno kompleksniji postupak, koji se sastoji i od množenja jednoznamenkastim brojem i od zbrajanja višeznamenkastih brojeva. Vrlo slično kao i kod množenja na papiru, prvi faktor ćemo redom množiti znamenkama drugog faktora te ih stoga moramo imati negdje zapisane. Izbora nije mnogo, jedino s čim raspolažemo je abakus te na njega i zapišemo oba faktora. Uštede prostora radi, kako ne bi morali unaprijed određivati veličinu dobivenog umnoška, zapišimo prvi faktor na krajnje lijeve stupce abakusa. Ostavimo zatim jedan stupac prazan, što daje bolju preglednost računa, te zapišimo drugi faktor na sljedećim stupcima.

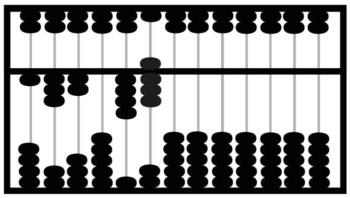
Kako ne bi morali razmišljati od kojeg stupca treba početi zapisivati produkt, napravit ćemo odmak od standardnog postupka množenja: znamenke drugog faktora odabiremo s desna na lijevo, tj. prvi faktor na početku množimo s znamenkom jedinica drugog faktora. Množenje je složenija operacija i zahtjeva malo drugačiji pristup. Kod zbrajanja i oduzimanja nije bilo potrebe zapisivanja drugog pribrojnika odnosno oduzimatelja, već se sve radilo kumulativno.
Za množenje na abakusu je potrebno prikaz oba faktora i u konačnici, prikaz rezultata množenja.

Postupak. Zapišemo najprije prvi faktor na abakus, zatim ostavimo jedan stupac prazan (razdijelimo brojeve), zapišemo drugi faktor.

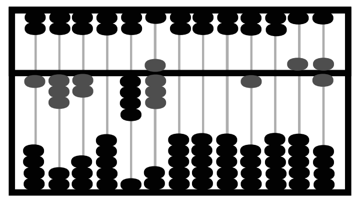
a) Ukoliko množimo jednoznamenkaste brojeve rezultate zapisujemo na temelju tablice množenja. Ukoliko množimo višeznamenkasti broj sa jednoznamenkastim, množimo s desna na lijevo jednoznamenkasti broj sa znamenkama višeznamenkastog broja. U slučaju prijenosa, vršimo zbrajanje.

b) Generalno, postupak množenja obavljamo kao i množenje s potpisivanjem. Na desnom kraju abakusa zapisujemo parcijalni produkt kojeg dobivamo iz umnoška znamenke *jedinice* u drugom faktoru s prvim faktorom. Nadalje, množimo znamenku *desetice* drugog faktora sa prvim faktorom i rezultat pomaknut za jedno mjesto ulijevo dodajemo zapisanom parcijalnom produktu. Postupak ponavljamo dok ne prođemo sve znamenke.

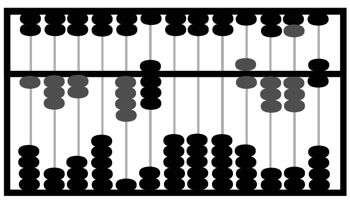
Primjer 4. *Umnožak na abakusu od* 132×48 *prikazan je na* Slici 5.



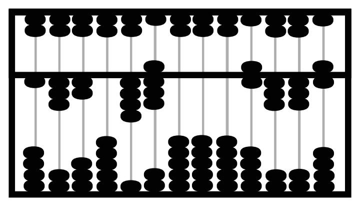
Postavljamo prvi i drugi faktor na abakus: 132|48



Množimo 132 s znamenkom *jedinica* od 48
i produkt pišemo na desnoj strani: $132 \times 8 = 1056$



Množimo 132 s *deseticom* od 48 ($132 \times 4(0)$)
i produkt s jednim pomakom ulijevo dodajemo
prethodnom produktu: $1056 + 528(0)$



Kad prođemo sve znamenke drugog faktora 48
rezultat na desnoj strani
je konačni produkt: 6336

Slika 5. Koraci u množenju brojeva na abakusu (sa sivom bojom su označena zrnca koje pomičemo)

3.4. Dijeljenje

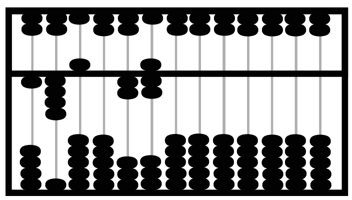
Kao što je jasno iz prethodnih opisa računskih operacija, namjera nam je opisati način za prenošenje postupka dijeljenja s papira na abakus. Obnovimo u tu svrhu ukratko znanje potrebnih koraka pri dijeljenju prirodnih brojeva - prvenstveno, rezultat koji želimo dobiti je cijeli broj, no također želimo odrediti i ostatak pri dijeljenju. Oba podatka se moraju nalaziti na abakusu nakon što je dijeljenje provedeno. Napomenimo kako abakus prvenstveno služi za provođenje cjelobrojnog dijeljenja (dijeljenja s ostatkom).

Kao i u svim računskim operacijama, rezultat (u ovom slučaju kvocijent) dobivamo znamenku po znamenku. Nakon što odredimo pojedinu znamenku kvocijenta, umanjujemo početni segment djeljenika s produktom djelitelja i posljednje određene znamenke kvocijenta. Taj umnožak nazivamo parcijalni produkt ili parcijalni umnožak. Postupak završava u trenutku kada djeljenik postaje manji od djelitelja.

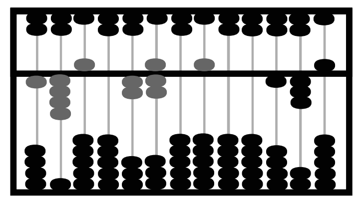
Sakupimo li sve navedene korake ovog postupka, vidimo da tijekom njega moramo provesti i dijeljenje i množenje i oduzimanje.

Iz tog razloga, dijeljenje na abakusu zapisujemo na sljedeći način: djeljenik zapisujemo na lijeve stupce abakuse te zatim ostavljamo jedan stupac prazan (radi preglednosti, a možemo i zamisliti da taj stupac imitira ':') nakon kojeg zapisujemo djelitelj. Očito nakon djelitelja ponovno dolazi prazan stupac (koji imitira '=') iza kojeg ćemo redom zabilježavati znamenke kvocijenta. No, kako moramo redom oduzimati od početnog segmenta djeljenika parcijalne produkte i ta množenja moramo obaviti na abakusu. Obavljamo ih na jedini razuman način - nakon što odredimo pojedinu znamenku kvocijenta, umnožak te znamenke i djelitelja dobivamo zapisujući znamenku po znamenku na desnim stupcima abakusa.

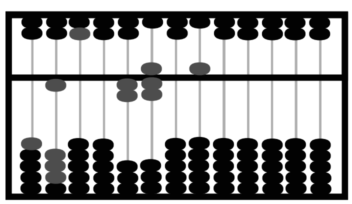
Dobiveni parcijalni produkt direktno oduzmemo od djeljenika (na ranije opisan način). Čim obavimo oduzimanje, parcijalni produkt nam više nije potreban te ga možemo izbrisati, tj. prikazati same nule na odgovarajućim stupcima.



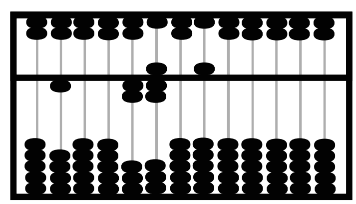
Postavljamo djeljenik i djelitelj na abakus: 145|27



Dijelimo 145 s 27 i rezultat pišemo s jednim stupcem odmakom i nalazimo parcijalni produkt trenutnog kvocijenta i djelitelja na desnoj strani.



Parcijalni produkt 135 oduzimamo od djeljenika 145. Razlika je sada manja od djelitelja što znači da smo dobili ostatak.



Cjelobrojno dijeljenje 145 s 27 daje rezultat 5 i ostatak 10.

Slika 6. Koraci u dijeljenju brojeva na abakusu (sa sivom bojom su označena zrnca koje pomičemo)

U principu, moguće je oduzimanje parcijalnih produkata obaviti i bez njihovog zapisivanja na desnim stupcima, oduzimajući direktno svaki dobiven broj. No, takav pristup ima više mana: osim nepreglednosti zapisa i mogućih poteškoća s označavanjem mjesta gdje treba započeti oduzimanje, povećava se i mogućnost pogreške. Zašto?

Prisjetimo se kako ponekad, pogotovo pri dijeljenju s brojevima od tri ili više znamenki, određivanje pojedine znamenke kvocijenta postaje zahtjevno. Tada često ne možemo biti sigurni je li odabrana znamenka točna sve dok ne odredimo pripadni parcijalni produkt. U trenutku kada ga imamo zapisanog, možemo biti sigurni da je odabir bio ispravan. Što u slučaju da se odabir ne pokaže ispravnim? Samo izbrišemo parcijalni produkt, pomaknemo zrnce - dva kako bi probali s nekom drugom znamenkom kvocijenta i računamo novi parcijalni produkt. A da smo parcijalni produkt dobiven pogrešno određenom znamenkom kvocijenta išli direktno oduzimati od djeljenika, mogli smo u trenutku upropastiti kompletan račun. Zaista kompletan, jer abakus ipak pamti samo prethodni korak.

Sada je očito kako će, nakon obavljenog čitavog postupka, djelitelj ostati nepromijenjen, desno od njega (nakon praznog stupca) će se nalaziti kvocijent, a lijevo (također nakon praznog stupca) će se nalaziti ostatak pri dijeljenju.

Primjer 5. *Cjelobrojno dijeljenje s ostatkom brojeva* 145 *i* 27 *prikazano je na* Slici 6.

4. Numerička ograničenja abakusa

Nakon što smo opisali provođenje računskih operacija, postaje jasno kako njihovo provođenje zahtjeva mnogo potrebnog mjesta na abakusu. Pod time mislimo kako nam je često za obavljanje neke računske operacije na abakusu potrebno mnogo više stupaca od samog broja znamenki brojeva s kojima radimo, pa čak i rezultata. Taj fenomen se pogotovo očituje prilikom množenja i dijeljenja.

U ovom poglavlju određujemo ocjene na veličinu brojeva s kojima se na abakusu može računati. Kako svaka od operacija ima neku svoju posebnost, proučit ćemo svaku zasebno.

Najprije ćemo tražene situacije opisati za uobičajeni abakus koji se sastoji od 13 stupaca, a zatim ih pokušati generalizirati na općenite abakuse s n stupaca, gdje je n neki prirodan broj.

4.1. Zbrajanje i oduzimanje

Zanimljivo pitanje koje se nameće jest - koliki je najveći broj kojeg možemo dodati nekom broju a tako da se njihov zbroj može zapisati na abakusu?
Neka je $n \in \mathbb{N}$ broj stupaca abakusa. Podsjetimo se da je ukupni broj znamenki broja a jednak $\lfloor \log a \rfloor + 1$. Uočite da ukupni broj znamenki zbroja ne smije premašiti broj stupaca. Dakle, zbrajamo li brojeve a i b, broj znamenki njihove sume će najviše biti jednak broju znamenki većega od sumanada, uvećanom za 1, pa prethodni uvjet možemo izreći na sljedeći način:

$$\max\{\lfloor \log a \rfloor + 1, \lfloor \log b \rfloor + 1\} + 1 \leq n \tag{2}$$

Za dani a koji je najveći broj s kojim ga možemo zbrojiti? Lako možemo vidjeti da je najveći b za kojeg će to vrijediti

$$b = 10^n - 1 - a.$$

Primijetimo kako će nakon sumiranja ovako odabranih brojeva na svakom od stupaca abakusa biti zapisana znamenka 9.

Za pitanje oduzimanja, odgovor je trivijalan.

4.2. Ograničenja množenja

Neka je a prirodan broj. Koji je najveći broj s kojim a možemo pomnožiti na abakusu, tj. koji je najveći mogući drugi faktor u množenju? Provjerimo prvo kada neke brojeve uopće možemo množiti na abakusu:

Propozicija 1. *Neka su $a, n \in \mathbb{N}$. Broj a možemo množiti na abakusu s n stupaca ukoliko vrijedi*

$$2\lfloor \log a \rfloor + 5 \leq n.$$

Dokaz. Najmanji broj koji možemo koristiti kao drugi faktor je 1. Prilikom množenja s 1, potrebno nam je $\lfloor \log a \rfloor + 1$ stupaca za prikaz broja a, 2 slobodna stupca, 1 stupac za prikaz drugog faktora te još $\lfloor \log a \rfloor + 1$ stupaca za prikaz umnoška. Dakle, za množenje broja a nam je potrebno barem $2\lfloor \log a \rfloor + 5$ stupaca. □

Nadalje ćemo pretpostaviti da je množenje moguće. Ovaj put ćemo odmah problem rješavati generalno, za abakus s proizvoljnih n stupaca, jer situacija $n = 13$ skriva neke mogućnosti.

Dakle, a i n su prirodni brojevi koji zadovoljavaju uvjet prethodne propozicije. Ispitajmo najprije koliko najviše znamenki može imati drugi faktor. Označimo taj broj znamenki s k. Najmanji k-znamenkasti broj je 10^{k-1}, a umnožak $a \cdot 10^{k-1}$ ima ukupno $\lfloor \log a \rfloor + k$ znamenki. Iz toga slijedi da, kako bi mogli ostvariti množenje broja a s k-znamenkastim brojem, moramo imati na raspolaganju barem $\lfloor \log a \rfloor + 1 + k + 2 + \lfloor \log a \rfloor + k = 2\lfloor \log a \rfloor + 2k + 3$ stupca.

Ovim dobivamo nejednakost $2\lfloor \log a \rfloor + 2k + 3 \leq n$. Odavde je $2k \leq n - 2\lfloor \log a \rfloor - 3$, tj. najveći mogući broj znamenki drugog faktora, k, jednak je $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor - \lfloor \log a \rfloor$.

Možemo razlikovati dvije situacije (iz tog razloga ovo razmatranje nismo započeli sa slučajem $n = 13$):

- n neparan, tada je $k = \frac{n-3}{2} - \lfloor \log a \rfloor$ te je broj stupaca potrebnih za množenje broja a s 10^{k-1} jednak $2\lfloor \log a \rfloor + 2k + 3 = n$. Maksimalni drugi faktor dobivamo iz maksimalnog mogućeg produkta. Primjetimo da u ovom slučaju maksimalni ostvarivi produkt ima $\frac{n-3}{2}$ znamenki te je zato maksimalni drugi faktor jednak $\lfloor \frac{10^{\frac{n-3}{2}} - 1}{a} \rfloor$.
- n paran, tada je $k = \frac{n-4}{2} - \lfloor \log a \rfloor$ te je broj stupaca potrebnih za množenje broja a s 10^{k-1} jednak $2\lfloor \log a \rfloor + 2k + 3 = n - 1$, tj. strogo je manji od n. Dakle, pri množenju broja a s najmanjim k-znamenkastim brojem nam ostaje i jedan slobodan stupac, što znači da raspolažemo s dovoljnim brojem stupaca da bi a mogli pomnožiti s bilo kojim k-znamenkastim brojem, pa i najvećim. U ovom slučaju je traženi maksimalni faktor jednak $10^k - 1$.

Prethodnim razmatranjem smo dokazali sljedeći rezultat:

Teorem 1. *Neka su $a, n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $2\lfloor \log a \rfloor + 5 \leq n$. Ukoliko je n neparan, tada je najveći broj kojim možemo a pomnožiti na abakusu s n stupaca jednak*

$$\lfloor \frac{10^{\frac{n-3}{2}} - 1}{a} \rfloor,$$

dok je za paran n taj broj jednak

$$10^{\frac{n}{2} - 2 - \lfloor log a \rfloor} - 1.$$

U slučaju $n = 13$, dobivamo da smo na abakusu s 13 stupaca u mogućnosti množiti brojeve s najviše 5 znamenki, te da je za takav broj a najveći drugi faktor jednak $\lfloor \frac{99999}{a} \rfloor$.

4.3. Ograničenja dijeljenja

Kako dijeljenje i predstavlja najkompliciraniju opisanu računsku operaciju, tako će i određivanje ograničenja pri njegovu korištenju biti najkompliciranije do sada. Slično kao i ranije, pitanje koje postavljamo je sljedeće: *Za dani prirodni broj a, koji je najveći prirodan broj s kojim ga možemo podijeliti na abakusu?*

Postavimo najprije neke uvjete za dijeljenje: svakako je očito da svaki broj manji od 10 možemo na abakusu podijeliti s proizvoljnim dvoznamenkastim brojem, ali takav račun nam nije interesantan jer rezultat znamo unaprijed. Općenito, svakome tko zna imalo aritmetike je jasno kako pri dijeljenju broja a s brojem većim od a dobivamo kvocijent nula i ostatak a. Iz tog razloga, uvedimo ogradu na ranije postavljeno pitanje - za dani prirodni broj a, koji je najveći prirodan broj b, $b \leq a$ kojim možemo a podijeliti na abakusu?

Odredimo najprije koje brojeve uopće na abakusu možemo podijeliti, tj. odredimo koliko najviše znamenki može imati neki broj uz uvjet da na abakusu imamo dovoljno stupaca za provođenje postupka dijeljenja tog broja. Jasno je kako broj od 13 znamenki sigurno na abakusu ne možemo podijeliti ni sa čim. Isto tako je očito da možemo lako dijeliti jednoznamenkaste i dvoznamenkaste brojeve. A što je s npr. peteroznamenkastim brojevima?

Za sam zapis takvog broja nam je potrebno 5 stupaca, zatim trebamo još 3 stupca koji ostaju prazni. Navedena 3 prazna stupca služe kako bi redom odvojili djeljenik od djelitelja, djelitelj od kvocijenta te pojedinu znamenku djelitelja od sljedećeg parcijalnog produkta. U svim predstojećim računima će ova 3 stupca, neophodna za preglednost provođenja dijeljenja na abakusu, zauzimati važnu ulogu. U najboljem slučaju će preostalih 5 stupaca biti dostatno da se na njima zapišu djelitelj i kvocijent, te nam ne ostaje niti jedan slobodan stupac za parcijalno množenje. Dakle, na abakusu s 13 stupaca ne možemo dijeliti brojeve s 5 znamenki pa niti one s više od 5 znamenki. Pokušajmo generalizirati ovu tvrdnju na abakuse s općenitim brojem stupaca. Započnimo s korisnom tehničkom lemom:

Lema 1. *Neka su $a, b \in \mathbb{N}$, te neka broj a ima n, a broj b m znamenki, tj. $\lfloor \log a \rfloor + 1 = n$ i $\lfloor \log b \rfloor + 1 = m$. Tada cjelobrojni kvocijent brojeva a i b (koji je jednak $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$) ima ili $n - m$ ili $n - m + 1$ znamenki.*

Dokaz. Iz uvjeta leme je jasno da vrijedi $10^{n-1} \leq a < 10^n$ i $10^{m-1} \leq b < 10^m$. Odatle dobivamo

$$10^{n-m-1} = \frac{10^{n-1}}{10^m} < \frac{a}{b} < \frac{10^n}{10^{m-1}} = 10^{n-m+1}.$$

Odmah slijedi kako je broj znamenki kvocijent $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ jednak ili $n - m$ ili $n - m + 1$. □

Koristeći prethodnu lemu, dokažimo interesantan rezultat:

Propozicija 2. *Neka su $a, n \in \mathbb{N}$. Broj a na abakusu s n stupaca nije moguće podijeliti niti jednim prirodnim brojem ukoliko vrijedi*

$$n < 2\lfloor \log a \rfloor + 6.$$

Dokaz. Pretpostavimo da na abakusu s n stupaca želimo broj a podijeliti s brojem od k znamenki, $1 \leq k \leq \lfloor \log a \rfloor + 1$. Iz *Leme 1* slijedi da je broj znamenki kvocijenta veći ili jednak $\lfloor \log a \rfloor + 1 - k$. Također možemo zaključiti i da je broj znamenki prvog parcijalnog produkta veći ili jednak k. Najpovoljniju situaciju dobivamo ukoliko su svi preostali parcijalni produkti jednaki nuli, jer nam je tada za svakog od njih potreban samo po jedan slobodan stupac. Primijetimo kako je takva situacija ostvariva ako i samo ako su sve znamenke kvocijenta, osim vodeće, jednake nuli. Ukupno, u najboljoj mogućoj situaciji nam za provođenje dijeljenja broja a treba barem $\lfloor \log a \rfloor + 1 + k + \lfloor \log a \rfloor + 1 - k + 3 + 1 = 2\lfloor \log a \rfloor + 6$ stupaca. Time dobivamo tvrdnju propozicije. □

Vratimo se sada na slučaj $n = 13$. Dakle, preostaje provjeriti što možemo reći o brojevima s manje od 5 znamenki.

Ako je broj a manji od 10, svakako ga možemo podijeliti sa samim sobom te je u tom slučaju traženi maksimum jednak upravo a.

Provjerimo vrijedi li adekvatna tvrdnja i za troznamenkasti broj a. Dovoljno je dokazati da na abakusu možemo podijeliti a sa samim sobom, jer je maksimalni mogući djelitelj ionako manji ili jednak a. Znači, sada nam za zapis dvaju brojeva a treba 6 stupaca, za kvocijent je očito ponovno dovoljan jedan stupac (jer je u ovom slučaju kvocijent jednak upravo 1, dok je ostatak jednak nuli), 3 prazna stupca, a jedini parcijalni produkt je troznamenkast. Sve zajedno, potrebno nam je upravo 13 stupaca, koliko i imamo! Dakle, i troznamenkasti brojeve možemo podijeliti sa samim sobom.

Generalizirajmo prethodna razmatranja u slijedećoj propoziciji:

Propozicija 3. *Neka je $a \in \mathbb{N}$. Na abakusu s n stupaca broj a možemo podijeliti sa samim sobom ukoliko vrijedi*

$$\lfloor \log a \rfloor \leq \frac{n-7}{3}.$$

Posebno, u slučaju $n = 13$, dobivamo kako broj možemo podijeliti sa samim sobom ukoliko je manji od 1000.

Dokaz. Poznato je da prirodni broj a ima $\lfloor \log a \rfloor + 1$ znamenki. Da bi ga mogli na abakusu podijeliti sa samim sobom potrebno nam je $3(\lfloor \log a \rfloor + 1) + 3 + 1$ stupaca, jer broj a moramo zapisati 3 puta (kao djeljenik, kao djelitelj i kao rezultat parcijalnog množenja), trebamo 3 prazna stupca i jedan stupac za kvocijent (koji je jednak 1). Ovaj zapis je moguć, ukoliko navedeni izraz nije veći od ukupnog broja stupaca, iz čega slijedi tvrdnja propozicije. □

Iz prethodne propozicije, uvrstimo li $n = 13$, slijedi kako svaki broj manji od 1000 možemo podijeliti sa samim sobom. Još jedino treba provjeriti što je sa četveroznamenkastim brojevima.

Ograničenja pri dijeljenju četveroznamenkastih brojeva

Na početku ovog posebno zanimljivog slučaja primijetimo važnu činjenicu - ukoliko na abakusu možemo zapisati posljednji parcijalni ne-nul produkt (dobiven množenjem posljednje znamenke kvocijenta koja je različita od nule s djeliteljem), tada možemo zapisati i sve prethodne. Ova tvrdnja je prilično očita, jer ukoliko smo mogli zapisati posljednji parcijalni ne-nul produkt, zasigurno smo mogli zapisati i pretposljednji jer smo imali jedan slobodan stupac više, pošto je u trenutku računanje pretposljednjeg parcijalnog produkta bila određena jedna znamenka kvocijenta manje. Na isti način možemo provesti zaključivanje i za prethodne produkte. Primijetimo i još jednu jednostavnu, ali važnu činjenicu - svaki ne-nul parcijalni produkt korišten pri dijeljenju ima ili jednak broj znamenki kao djelitelj ili jednu znamenku više (iz razloga što je dobiven množenjem djelitelja s jednoznamenkastim brojem).

Prvo pitanje na koje treba odgovoriti je:
Postoji li za svaki četveroznamenkasti broj a neki prirodan broj s kojim se a može podijeliti na abakusu (s 13 stupaca)?

Traženi broj uvijek postoji i jednak je 1. Zaista, pri takvom dijeljenju su nam potrebna 4 stupca kako bi zapisali broj a, 1 stupac za zapis djelitelja ($= 1$), 4 stupca za zapis kvocijenta ($= a$), 1 stupac za zapis posljednjeg parcijalnog produkta (1 puta znamenka jedinica broja a) i 3 slobodna stupca; što ukupno daje 13 stupaca.

Pogledajmo koja ograničenja smo u mogućnosti dobiti odmah. Prije svega, četveroznamenkasti broj ne možemo podijeliti četveroznamenkastim, jer sam zapis tih brojeva, slobodnih mjesta i jednoznamenkastog kvocijenta zauzima 12 stupaca, što ne ostavlja mjesta niti za jedan ne-nul parcijalni produkt.

Također, četveroznamenkasti broj ne možemo podijeliti niti s troznamenkastim, jer nam je tom prigodom potrebno 7 stupaca za zapis tih brojeva, 3 ostaju slobodna, barem jedan za zapis kvocijenta te barem 3 za zapis (prvog) parcijalnog produkta, koji ne može biti jednak nuli. Svakako, za takav postupak nam je potrebno više od 13 stupaca.

Nadalje preostaje vidjeti kada se četveroznamenkasti broj može podijeliti dvoznamenkastim.

Cjelobrojnim dijeljenjem takvih brojeva dobivamo kvocijent koji, prema *Lemi 1*, ima ili 2 ili 3 znamenke. Pošto mi želimo odrediti najveći mogući djelitelj, prvenstveno smo zainteresirani za određivanje dijeljenja pri kojima dobivamo dvoznamenkaste kvocijente, jer što je kvocijent manji - to je djelitelj veći.

Dakle, neka su a i b prirodni brojevi, $1000 \leq a \leq 9999$, $10 \leq b \leq 99$ takvi da je $10 \leq \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \leq 99$. Promotrimo korak po korak kada je dijeljenje broja a brojem b ostvarivo na abakusu (s 13 stupaca).

Za zapisivanje brojeva a i b te 3 prazna stupca smo iskoristili ukupno 9 stupaca. Nakon što odredimo i zapišemo prvu znamenku kvocijenta, koja je svakako različita od nule, preostaju nam još 3 slobodna stupca na desnoj strani abakusa. Ta 3 stupca su svakako dovoljna za zapisivanje prvog parcijalnog produkta, koji ima ili 2 ili 3 znamenke.

Kada odredimo drugu, u ovom slučaju i posljednju, znamenku kvocijenta preostaju nam samo 2 stupca za zapis parcijalnog produkta. Zato je nužan uvjet da bi mogli provesti traženo dijeljenje taj da produkt djelitelja b i znamenke jedinica kvocijenta bude manji od 100. Ova ograda se svakako postiže ukoliko je znamenka jedinica kvocijenta jednaka 0 ili 1. Ako je ta znamenka jednaka 2, b mora biti manje od 50; ako je jednaka 3, b mora biti manje od 34, itd. Ovaj jednostavan zaključak ima i (barem jednu) interesantnu posljedicu:

Lema 2. *Ako je $a \geq 9108$, tada na abakusu s 13 stupaca nije moguće broj a*

podijeliti dvoznamenkastim brojem tako da i dobiveni kvocijent bude dvoznamenkast.

Dokaz. Primijetimo da je $9108 = 99 \cdot 92$. Odatle slijedi kako je najmanji dvoznamenkasti kvocijent koji možemo dobiti dijeljenjem broja a s brojem manjim od 100 jednak 92. Kako znamenka jedinica kvocijenta ne može biti niti 0 niti 1, a svi raspoloživi djelitelji su veći od 91, dijeljenje nije moguće provesti. □

Iz prethodne leme slijedi kako moramo promatrati dva odvojena slučaja - brojeve koji su manji od 9108 i brojeve koji su veći ili jednaki 9108. U prvom slučaju tražimo najveći dvoznamenkasti djelitelj koji daje dvoznamenkasti kvocijent pri čemu će i drugi parcijalni produkt morati biti ostvariv, dok će u drugom slučaju dobiveni kvocijenti morati biti troznamenkasti ili čak četveroznamenkasti.

(I) Neka je $1000 \leq a \leq 9107$.

Znamo da za ovakve brojeve a postoje dvoznamenkasti djelitelji koji će dati i dvoznamenkaste kvocijente, a pokušat ćemo i pobliže odrediti maksimalni djelitelj broja a dijeljenjem kojim će biti moguće. Pri tome je osnovno zadovoljiti uvjet naveden neposredno prije prethodne leme.

Započnimo razmatranje s ilustrativnim primjerom:
neka je $a \in \{8910, 8911, \ldots, 9107\}$, $(8910 = 99 \cdot 90, \ldots, 9107 = 99 \cdot 92 - 1)$. Očito je $\lfloor \frac{a}{99} \rfloor = 90$ ili $\lfloor \frac{a}{99} \rfloor = 91$, tj. kvocijent završava znamenkom 0 ili 1 te je za brojeve iz navedenog skupa traženi maksimalni djelitelj jednak 99, jer je 99 ionako najveći mogući kandidat, dok posljednje znamenke kvocijenta (0 i 1) omogućavaju i zapis drugog parcijalnog produkta.

Ovim primjerom smo rješili situaciju za brojeve između 8910 i 9107. Na sličan način ćemo opisati i maksimalne djelitelje preostalih brojeva iz ovog slučaja, tj. dokazat ćemo da je traženi maksimalni djelitelj broja upravo najveći dvoznamenkasti broj pri dijeljenju s kojim će dobiveni kvocijent završavati ili znamenkom 0 ili znamenkom 1. Prednost danoga opisa se očituje u tome što mi unaprijed znamo da je drugi parcijalni produkt, a time i čitav postupak dijeljenja, moguće zapisati ukoliko kvocijent završava znamenkom 0 ili 1, dok bi situacija u kojoj je ta znamenka veća od 1 zahtjevala dodatno ispitivanje i komplikacije koje na ovaj način izbjegavamo.

Neka je sada $a \leq 8909$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom, a možemo zapisati u obliku $a = 99 \cdot k + l$, gdje je $l < k \leq 89$ (zbog $a \leq 8909$). Odatle dobivamo $a < 100k$, tj. $\frac{a}{k} < 100$. Naravno, tada je i $\frac{a}{k'} < 100$, za sve $k' > k$. Ovime dobivamo $99 - k$ dvoznamenkastih brojeva k' takvih da je vrijednost $\lfloor \frac{a}{k'} \rfloor$ također dvoznamenkasta. Kako je $k \leq 89$, za svaki $a \leq 8909$ raspolažemo s barem 10 odgovarajućih djelitelja k'.

U daljnjem ćemo dokazati, koristeći dobiveni broj odgovarajućih djelitelja koji daju dvoznamenkaste kvocijente, da za svaki $a \leq 8909$ postoji $n \geq 50$ takav da je znamenka jedinica broja $\lfloor \frac{a}{n} \rfloor$ jednaka 0 ili 1. Iz toga će slijediti da je traženi maksimalni djelitelj upravo najveći takav broj n. Ocjena $n \geq 50$ je bitna jer bi, za $n < 50$, dijeljenje broja a s n bilo ostvarivo na abakusu i u slučaju da je znamenka jedinica kvocijenta jednaka 2.

Da bi pokazali gornju tvrdnju, dovoljno je pokazati kako postoji barem 10 uzastopnih prirodnih brojeva m, većih od 50, za koje vrijedi

$$1 < \frac{a}{m} - \frac{a}{m+1} < 2,$$

jer iz toga slijedi kako se među cjelobrojnim kvocijentima $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor$ mora pojaviti barem jedan čija je znamenka jedinica jednaka 0 ili 1.

Ako je $6480 = 80 \cdot 81 < a$, tada je $1 < \frac{a}{m} - \frac{a}{m+1} < 2$ za sve $m \in \{70, 71, \ldots, 80\}$ pa je za takve a tvrdnja dokazana. Slično, ako je $3660 = 60 \cdot 61 < a \leq 6480$, tada je $1 < \frac{a}{m} - \frac{a}{m+1} < 2$ za sve $m \in \{60, 61, \ldots, 70\}$ pa tvrdnja vrijedi i za takve a. Nadalje, ako je $2550 = 50 \cdot 51 < a \leq 3660$, tada je $\frac{1}{2} < \frac{a}{m} - \frac{a}{m+1} < 2$ za sve $m \in \{50, 51, \ldots, 70\}$ pa tvrdnja vrijedi i za takve a, jer smo u ovom slučaju konstruirali 20 uzastopnih kvocijenata koji se razlikuju za barem $\frac{1}{2}$.

Preostaje još provjeriti tvrdnju za $1000 \leq a \leq 2550$. Za takve a je $\frac{a}{m} - \frac{a}{m+1} \leq 1$ za sve $m \in \{50, 51, \ldots, 99\}$, pri čemu se jednakost postiže jedino za $a = 2550$ i $m = 50$ (primijetimo da je $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m'} - \frac{1}{m'+1}$ za $m > m'$). Odatle slijedi da će za sve a i sve $m \in \{50, 51, \ldots, 99\}$ vrijediti ili $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor = \lfloor \frac{a}{m+1} \rfloor$ ili $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor = \lfloor \frac{a}{m+1} \rfloor + 1$. Kako uz to vrijedi i $\frac{a}{50} - \frac{a}{99} > 9$, slijedi da za sve a postoje $m_1, m_2 \in \{50, 51, \ldots, 99\}$ takvi da je znamenka jedinica od $\lfloor \frac{a}{m_1} \rfloor$ jednaka 0, a znamenka jedinica od $\lfloor \frac{a}{m_2} \rfloor$ jednaka je 1.

Napokon, ovim smo dokazali da je za $1000 \leq a \leq 9107$ maksimalni broj s kojim je na abakusu moguće podijeliti a upravo najveći dvoznamenkasti broj b takav da je znamenka jedinica broja $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ jednaka 0 ili 1.

(II) Neka je $9108 \leq a \leq 9999$.

Za zapisivanje brojeva a i dvoznamenkastog djelitelja (kojeg ćemo označiti s b) te 3 prazna stupca smo iskoristili ukupno 9 stupaca. Nakon zapisivanja prve znamenke kvocijenta, preostaju nam 3 slobodna stupca na desnoj strani abakusa, dovoljno za zapisivanje prvog parcijalnog produkta (od 2 ili 3 znamenke). Nakon što odredimo i zapišemo drugu znamenku kvocijenta, preostaju nam samo 2 stupca za zapis drugog parcijalnog produkta. Time dobivamo prvi nužan uvjet za provođenje traženog dijeljenja - produkt djelitelja b i znamenke desetica kvocijenta mora biti manji od 100. Na isti način zaključujemo da, nakon što odredimo i posljednju znamenku kvocijenta, za zapisivanje posljednjeg parcijalnog produkta preostaje samo jedan stupac. Odmah slijedi da znamenka jedinica kvocijenta mora biti jednaka nuli.

Vidjeli smo da se jedini uvjeti postavljaju samo na znamenke desetica i jedinica kvocijenta, a sve uvjete zadovoljavaju 0 ili 1 kao znamenka desetica, uz znamenku jedinica koja nužno mora biti jednaka 0. Nama odgovara da je kvocijent što manji, jer time dobivamo veći djelitelj. Objedinimo li prethodne zahtjeve, slijedi kako je za naše prohtjeve idealan kvocijent jednak 100.

Dakle, ako za broj $a \geq 9108$ postoji $b \leq 99$ takav da je $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = 100$, b je upravo maksimalni traženi djelitelj.

Lako se vidi da se gornji uvjet može iskazati na sljedeći način:

Propozicija 4. *Ako je* $9108 \leq a \leq 9999$ *takav da vrijedi*

$$\lfloor \frac{a}{100} \rfloor > a - \lfloor \frac{a}{100} \rfloor \cdot 100,$$

tada je maksimalni broj s kojim se a može podijeliti na abakusu s 13 *stupaca jednak* $\lfloor \frac{a}{100} \rfloor$.

Na primjer, ako je $9300 \leq a \leq 9392$, tada je maksimalni djelitelj b jednak upravo 93, jer je $\lfloor \frac{a}{93} \rfloor = 100$, $\lfloor \frac{a}{100} \rfloor = 93$ i $a - 93 \cdot 100 < 93$, dok za $9393 \leq a \leq 9399$ ne postoji b za koji vrijedi $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = 100$.

Primijetimo kako smo ovim rješili problem za sve četveroznamenkaste brojeve osim sljedećih:
$9191, 9192, \ldots, 9199, 9292, 9293, \ldots, 9299, 9393, 9394, \ldots, 9399$,$9494, 9495, \ldots, 9499$, $9595, 9596, \ldots, 9599, 9696, 9697, \ldots, 9699, 9797, 9798, 9799, 9898, 9899$ i 9999.

Interesantno svojstvo ovih brojeva, koje je i sadržano u prethodnoj propoziciji, jest da se radi upravo o brojevima većim od 9108 čiji je ostatak pri dijeljenju sa 100 nije manji od cjelobrojnog kvocijenta pri istom dijeljenju.

Kako niti za jednog od ovih brojeva ne postoji $10 \leq b \leq 99$ takav da njihov cjelobrojni kvocijent bude jednak 100, pogledajmo koji je sljedeći najmanji kvocijent za koji je postupak dijeljenja provediv. Takav kvocijent je očito jednak 110, zbog uvjeta da na mjestu jedinica mora imati nulu, a znamenka 1 na mjestu desetica omogućava da drugi parcijalni produkt bude dvoznamenkast. Sada potražimo odgovarajuće djelitelje za navedene brojeve. Direktnom provjerom dobivamo da je maksimalni djelitelj brojeva oblika $9090+101 \cdot i+j$, $1 \leq i \leq 7$, $0 \leq j \leq 9-i$, jednak $82+i$.

Kako za brojeve $9898, 9899, 9999$ ne postoji odgovarajući djelitelj, nastavljamo na isti način tražeći sljedeći pogodan kvocijent. Ako pokušamo s kvocijentom jednakim 200, ponovno odgovarajući djelitelj ne postoji, dok za kvocijent jednak 210 dobivamo da je maksimalni djelitelj brojeva 9898 i 9899 jednak 47.

Preostaje još odrediti maksimalni djelitelj broja 9999. Lakim računom dobivamo interesantan rezultat: najveći broj kojim se na abakusu s 13 stupaca može podijeliti broj 9999 je 9.

Ovim smo u potpunosti klasificirali najveće djelitelje četveroznamenkastih brojeva.

Neka je $n \in \mathbb{N}$, te pretpostavimo da promatramo abakus s n stupaca. Primijetimo kako iz *Propozicije 2* i *3* slijedi da broj a za koji vrijedi

$$\frac{n-7}{3} < \lfloor \log a \rfloor \leq \frac{n-6}{2}$$

na abakusu s n stupaca možemo podijeliti nekim prirodnim brojem koji je strogo manji od a, ali ne možemo podijeliti s brojem a. Za $n = 13$ gornja relacija je zadovoljena samo za četveroznamenkaste brojeve a. Lako se vidi kako za $n > 13$ dobivamo barem dvije mogućnosti broja znamenki od a koje bi trebali ispitivati, što ipak prelazi okvire ovog rada.

Možemo zaključiti s napomenom da abakus u računu nema mane, tj. neće pogriješiti ukoliko mi to ne učinimo, no ipak su vidljiva i njegova ograničenja pri računanju (ponajprije zbog fiksnog broja stupaca koje abakus ima), do kojih ne dolazi prilikom korištenja papira ili računala.

Literatura

[1] I. Matić, D. Ševerdija, *Metodički aspekti abakusa 1*, Matematika i škola, **11**(2009), 57 - 62

[2] I. Matić, D. Ševerdija, *Metodički aspekti abakusa 2*, Matematika i škola, prihvaćen za objavljivanje

[3] http://www.mathos.hr/˜dseverdi/Abacus_web/

[4] Lee Kai - Chen. *How to learn Lee's abacus*, by Lee's abacus correspondence school, Taipei, Taiwan, 1958.