Dva dokaza Heronove formule

Ninoslav Truhar*

Sažetak. *Ovaj članak sadrži izuzetno zanimljiv i elegantan dokaz Heronove formule srednjoškolca Milesa Edwardsa objavljenog u [2]. Ono što ga posebno čini zanimljivim jest upotreba kompleksnih brojeva. Željeli smo istaći da ovaj dokaz pokazuje da ponekad izlazak ili nepridržavanje standardnih klišea ili rigidnih pravila može proizvesti lijep i zanimljiv matematički rezultat.*

Ključne riječi: *novi dokaz Heronove formule, površina trokuta*

Two proofs of Herons's formula

Abstract. *This paper contains interesting and elegant proof of the Heron's Formula obtained by high school student Miles Edwards, published in [2]. The proof is interesting for its usage of complex numbers. In this paper we wanted to emphasize that this proof illustrates that sometimes unusual approach to standard problems can produce interesting and skillful, precise mathematical result.*

Key words: *innovative proof of Heron's Formula, area of triangle*

1. Uvod

Osnovna ideja ovog članka jest prikaz novog dokaza Heronove formule objavljenog u [2]. Da bi mogli što bolje ilustrirati izuzetno zanimljiv i elegantan dokaz srednjoškolca Milesa Edwardsa mi ćemo prvo prikazati kako se do sada izvodio taj dokaz u srednjoškolskim udžbenicima i sveučilišnim skriptama (vidi npr. [1] ili [3]).

Jedan od najpoznatijih matematičara u razdoblju oko 1. stoljeća prije Krista bio je Heron iz Aleksandrije. Njegovo glavno djelo *Metrica* sastoji se od tri knjige koje se bave ravnim i zaobljenim plohama, volumenima te dijeljenjem likova i tijela u zadanom omjeru.

U biti se ne radi o novim rezultatima, već o rekapitulaciji Euklidovih i Arhimedovih. Poznata Heronova formula za površinu trokuta glasi

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, email: ntruhar@mathos.hr

gdje je s poluopseg trokuta, tj. $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, i a, b i c duljine stranica trokuta. Zanimljivo je istaknuti da je tu formulu poznavao i Arhimed (287–212 pr. Kr.).

U sljedećem poglavlju ćemo prikazati jedan od najpopularnijih dokaza Heronove formule koji se može pronaći u mnogim udžbenicima, skriptama i drugdje.

2. Standadni dokaz

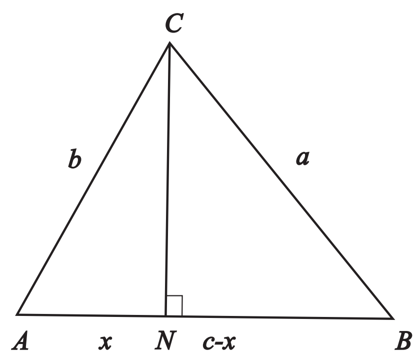
Kako smo već vidjeli u uvodu, Heronova formula se može zapisati u obliku teorema na sljedeći način:

Teorem 1. *Ako stranice trokuta imaju duljine a, b i c, tada je površina tog trokuta dana sa*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

Dokaz.

Neka je C vrh trokuta takav da mu je pripadni kut šiljast. Neka je N nožište visine iz vrha C. Tada je $|\overline{CN}| = v_c$. Neka je $|\overline{AN}| = x$, tada je $|\overline{NB}| = |\overline{AB}| - |\overline{AN}| = c - x$.



Kako je $\triangle ANC$ pravokutan, a katete mu imaju duljine x, v_c i hipotenuza duljinu b, Pitagorin teorem daje

$$v_c^2 = b^2 - x^2, \tag{2}$$

Obzirom da je $\triangle CNB$ pravokutan, a katete mu imaju duljine v_c, $c-x$ i hipotenuza duljinu a, Pitagorin teorem daje

$$v_c^2 = a^2 - (c-x)^2 \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= a^2 - (c-x)^2 \\ &= a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \\ 2cx &= -a^2 + b^2 + c^2 \\ x &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \end{aligned} \tag{4}$$

Uvrštavanjem (4) u (2) dobije se

$$
\begin{aligned}
v_c^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2 \\
&= \left(b - \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)\cdot\left(b + \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right) \\
&= \left(\frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{2c}\right)\cdot\left(\frac{2bc-a^2+b^2+c^2}{2c}\right) \\
&= \left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2c}\right)\cdot\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\right) \\
&= \left(\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2c}\right)\cdot\left(\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2c}\right) \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} \\
&= \frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4c^2} \\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}\,, \\
\frac{cv_c}{2} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,, \\
P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,
\end{aligned}
$$

što je tražena Heronova formula. □

3. Novi dokaz

U ovom poglavlju ćemo prikazati novi dokaz Heronove formule. Ono što ga posebno čini zanimljivim jest upotreba kompleksnih brojeva, koji "kao da ne pripadaju" ovom dokazu. Upravo ta činjenica nam se učinila zanimljivom pa stoga i želimo istaći ovaj dokaz kao primjer da ponekad izlazak ili nepridržavanje standardnih klišea ili rigidnih pravila može dati lijep i zanimljiv rezultat.

Dokaz.

Neka je I središte trokutu $\triangle ABC$ upisane kružnice, a r pripadni polumjer.

Neka su $a = y + z$, $b = x + z$, i $c = x + y$ duljine stranica nasuprot vrhova A, B, i C. Primijetimo da je poluopseg dan sa $s = x + y + z$.

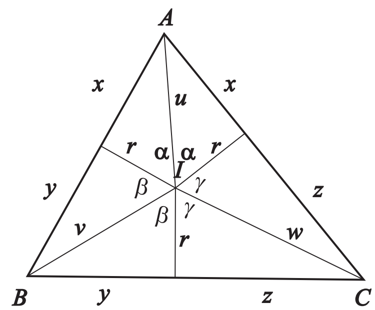
Očito je $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$, odnosno $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Koristeći polumjer upisane kružnice r, realne brojeve x, y, z, u, v i w te kutove α, β i γ označene na slici 1, definiramo kompleksne brojeve $(r+ix)$, $(r+iy)$ i $(r+iz)$ za koje vrijedi:

$$r + ix = ue^{i\alpha}\,, \quad r + iy = ve^{i\beta}\,, \quad r + iz = we^{i\gamma}\,.$$

Primijetimo da je sada

$$
\begin{aligned}
(r+ix)(r+iy)(r+iz) &= (ue^{i\alpha})(ve^{i\beta})(we^{i\gamma}) = uvwe^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \\
&= uvwe^{i\pi} = -uvw. \qquad (5)
\end{aligned}
$$



Slika 1. Trokut $\triangle ABC$ s pripadnim polumjerom upisane kružnice

Primijetimo da je lijeva strana izraza (5) jednaka

$$(r+ix)(r+iy)(r+iz) = r^3 + ir^2x + ir^2y + ir^2z - rxy - rxz - ryz - ixyz.$$

Gornja relacija i (5) daju

$$0 = \mathrm{Im}[(r+ix)(r+iy)(r+iz)] = r^2(x+y+z) - xyz\,,$$

odnosno

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} = \sqrt{\frac{(s-(y+z))(s-(x+z))(s-(x+y))}{s}}\,,$$

a zbog $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$ i $s = x+y+z$, vidimo da možemo pisati

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\,.$$

Budući je površina trokuta $\triangle ABC$ jednaka zbroju površina trokuta $\triangle BIA$, $\triangle CIB$ i $\triangle AIC$, imamo

$$P = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

što je Heronova formula. □

Napomena 1. *Uočimo da je gornji dokaz znatno kraći od onoga korištenog u teoremu 1. Ključnu ulogu u tome ima izraz (5), iz kojeg se vidi da produkt kompleksnih brojeva $(r+ix)(r+iy)(r+iz)$ poprima čistu realnu vrijednost, pa stoga mu je imaginarni dio jednak nuli. Ova činjenica se dalje koristi za jednostavno izračunavanje polumjera trokutu upisane kružnice koja se na jednostavan način može izraziti preko poluopsega s.*

Literatura

[1] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka, za 1. razred gimnazije* Element, 2001.

[2] Miles Dillon Edwards, *FA Proof of Heron's Formula*, American Mathematics Monthly, Vol. 114, No. 10, 2007, p. 937.

[3] D. Ilišević i M. Bombardelli, Elementarna geometrija, skripta PMF-Matematički Odjel, 2007. http://web.math.hr/nastava/eg/EGskripta.pdf