Здравко Цветковски, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ II

Оваа статија на извесен начин е продолжение на статијата *Метод на инавријанти* напишана од вториот автор и објавена прв пат во 2014 година во списанието Сигма, а реобјавена на сајтот Математички талент. Во спомената статија е објаснета идејата на методот на инваријанти и се решени определен број примери, па затоа во натамошните разгледувања ќе се задржиме на задачи кои ќе ги решиме со овој метод. На почетокот ќе дадеме една задача, за која не може да се каже дека при нејзиното решавање методот на иваријанти е применет во изворна форма.

Задача 1. На табла се напишани броевите $1,2,...,20$. Во еден чекор можеме да избришеме било кои два од нив a и b, и наместо нив на таблата го запишуваме бројот $a+b-1$. Кој број ќе биде запишан на таблата после 19 чекори?

Решение. Нека S_i е збирот на броевите на табалата по i–тиот чекор. Тогаш $S_i = S_{i-1} - 1$, т.е. со секој чекор збирот на броевите запишани на таблата се намалува за 1. Имаме 20 броеви и како по секој чекор бројот на броевите се намалува за 1, по 19 чекори ќе имаме еден број и тој ќе биде еднаков на збирот на броевите кој се добива по 19 чекори. Но,

$$S_0 = 1+2+...+20 = \tfrac{20\cdot 21}{2} = 210,$$

што значи на таблата по 19 чекори ќе остане бројот $S_{19} = 210-19 = 191$. ■

Сега ќе разгледаме задачи кои ќе ги решиме со помош на методот на инваријанти.

Задача 2. Во секој чекор еден триаголник можеме да го разделиме на 5 помали триаголници. Дали по конечен број чекори, даден триаголник може да биде разделен на 2010 помали триаголници.

Решение. Бројот на триаголници по секој чекор се зголемува за 4, т.е по k чекори ќе имаме $4k+1$ триаголници. Но, $2010 = 4\cdot 502 + 2$, што значи дека бројот 2010 е од облик $4k+2$, па затоа дадениот триаголник не може да се раздели на 2010 помали триаголници.■

Задача 3. При еден чекор дадена тројка цели броеви (a,b,c) може да се трансформира во тројката $(a-b,b-c,c-a)$. Да се докаже дека за било која почетна тројка (a,b,c), по најмалку четири чекори никогаш не може во добиените тројки да се појават броевите 2021 или -2021.

Решение. Нека е дадена тројката (a,b,c), $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Тогаш по првиот чекор ја имаме втората тројка

$$(a-b,b-c,c-a).$$

Третата тројка е

$$(a-2b+c,b-2c+a,c-2a+b),$$

а четвртата тројка е

$$(3(c-b),3(a-c),3(b-a)).$$

Според тоа, во четвртата тројка сите три броја се деливи со 3, па затоа во секоја следна тројка сите три броја ќе бидат деливи со 3. Но, броевите 2021 и -2021 не се деливи со 3, па затоа по најмалку четири чекори никогаш не може во добиените тројки да се појават броевите 2021 или -2021. ■

Задача 4. Дадена е шаховска табла 8×8, обоена на стандарден начин. Во еден чекор можеме да ги пребоиме, црните во бели, а белите во црни:

а) сите квадратчиња на произволно избран ред или колона,

б) сите квадратчиња на призволно избран квадрат 2×2.

Дали по конечен број чекори, може на таблата да остане само едно црно квадратче.

Решение: а) Со пребојување на ред (колона) со x црни и $8-x$ бели квадратчиња добиваме $8-x$ црни и x бели квадратчиња, бројот на црни квадратчиња се менува за

$$|(8-x)-x|=|8-2x|,$$

т.е. за парен број. Според тоа, при било кој чекор парноста на бројот на црни квадратчиња не се менува.

На почетокот имаме 32 црни квадратчиња, што значи дека по било кој чекор ќе има парен број црни квадратчиња, т.е. не може да остане едно црно квадртаче.

б) Слично како под а). Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 5. Дали е можно меѓу броевите 0, 1, 2, 3, .., 10 да се распоредат знаците $+$ и $-$ така што вредноста на добиениот алгебарски израз ќе биде 0.

Решение. Ќе покажеме дека такво разместување не е можно.

Збирот $0+1+2+...+10=55$ е непарен број. При било промена на еден знак $+$ во $-$ вредноста на изразот се намалува за парен број (ако пред бројот $k \geq 1$ го замениме знакот $+$ со знакот $-$, тогаш вредноста на изразот се менува за $2k$). Последното значи дека при било какво распоредување на знаците $+$ или $-$ вредноста на добиениот израз ќе биде непарен број. Но, 0 е парен број, па затоа бараното распоредување на знаците $+$ и $-$ не е можно. ■

Задача 6. Дадена се реалните броеви a,b и c. Во еден чекор се прави некоја пермутација на броевите a,b и c, на пример (a,b,c) и од неа се добива тројката $(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}},c)$, т.е. се добиваат броевите $\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ и c. Потоа од овие броеви се прави нова пермутација итн. Дали со оваа трансформација од броевите $2,\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ може да се добијат броевите $1,\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$.

Решение. Нека почетните броеви се a,b и c и нека во следниот чекор се добиени броевите $\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ и c. Тогаш

$$(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2+(\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2+c^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2-2ab+b^2}{2}+c^2=a^2+b^2+c^2.$$

Според тоа, во секој чекор при дадената трансформација збирот на квадратите на дадените броеви не се менува, т.е. тој е инваријантен. Но,

$$2^2+(\sqrt{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{13}{2}\neq 6+2\sqrt{2}=1^2+(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2,$$

па затоа при дадената трансформација од броевите $2,\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ не може да се добијат броевите $1,\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. ■

Задача 7. Змејот има глави 100. Витезот Радован има магичен меч, кој при едно замавнување може да пресече 15, 17, 20 или 5 глави, при што на змејот му растат соодветно 24, 2, 14 или 17 нови глави. Ако Радован во некој момент му ги пресече сите глави на змејот, тој умира. Дали Радован може да го победи змејот?

Решение. Од

$$24-15=3\cdot 3, 17-2=3\cdot 5, 20-14=3\cdot 2, 17-5=3\cdot 4$$

добиваме дека по секој потег на Радовон разликата меѓу „постојните“ и „новите“ глави на змејот се менува за број делив со 3, што значи дека бројот на главите на змејот е инваријантен по модул 3. Но, $100 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, па затоа заклучуваме дека змејот никогаш не може да има 0 глави, што значи дека витезот Радован не може да го победи змејот.■

Задача 8. На еден остров живеат 1995 камелеони, меѓу кои има сини, црвени и жолти. Ако се сретнат два камелеони со различна боја, тие истовремено ја менуваат својата боја во преостанатата трета боја. Во еден момент имало 1000 сини, 395 црвени и 600 жолти камелеони. Дали по извесно време може сите камелеони да бидат во една иста боја.

Решение. Нека во даден момент имаме a - сини, b - црвени и c - жолти камелеони. Тогаш од тројката (a,b,c) се добива тројка еднаква на некоја од тројките:

$$(a-1,b-1,c+2),\ (a-1,b+2,c-1) \text{ или } (a+2,b-1,c-1).$$

Затоа при секоја промена на боите на два камелеони разликите на броевите на камелеоните во трите пара бои $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ се инваријантни по модул 3.

На почетокот ја имаме тројката $(1000,395,600)$, за која важи

$$1000-395 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3),\ 1000-600 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \text{ и } 600-395 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Ако може сите камелеони да бидат во една иста боја, тогаш се добива една од тројките $(1995,0,0)$, $(0,1995,0)$ или $(0,0,1995)$. Но, соодветните разлики во секоја од овие три тројки се конгруентни со 0 по модул 3, од каде следува дека во ниту еден момент, камелеоните не можат да бидат во една иста боја.■

Задача 9. На масата се поставени a бели, b црни и c црвени топчиња. Во еден чекор , можеме да изберем било кои две топчиња со различна боја и секое од нив да го замениме со топче обоено во преостанатата трета боја. Да се најде условот кој треба да го задоволуваат броевите a, b и c така што по конечене број чекори, сите топчиња на таблата да бидат обоени во една иста боја.

Решение. Како и во претходната задача во еден чекор од тројката (a,b,c) може да се добие една од следниве тројки

$$(a+2,b-1,c-1),\ (a-1,b+2,c-1) \text{ или } (a-1,b-1,c+2).$$

Во овие три случаи соодветно добиваме

$$(a+2)-(b-1) = a-b+3 \equiv a-b (\mathrm{mod}\, 3)$$
$$(a-1)-(b+2) = a-b-3 \equiv a-b (\mathrm{mod}\, 3)$$

$$(a-1)-(b-1)=a-b\equiv a-b(\mathrm{mod}\,3),$$

што значи дека разликата $I=a-b$ е инваријанта по модул 3. Исто така $b-c$ и $c-a$ се инваријанти по модул 3.

Нека на крајот сите топчиња се обоени во една иста боја, на пример во бела боја. Тоа значи дека дека е добиена тројката $(a+b+c,0,0)$. Тогаш од претходно изнесеното следува дека

$$b-c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ a-b\equiv a+b+c(\mathrm{mod}\,3) \text{ и } c-a\equiv a+b+c(\mathrm{mod}\,3),$$

т.е.

$$2(a+b+c)\equiv c-b\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$$

односно

$$a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3).$$

Конечно,

$$b\equiv c(\mathrm{mod}\,3) \text{ и } a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$$

се условите кои треба да го задоволуваат броевите a, b и c за постигнување на бараната состојба.■

Задача 10. На табла се напишани броевите $\frac{49}{k}$, каде $k=1,2,...,97$. Во еден чекор можеме да избришеме два од дадените броеви a и b и на нивно место на таблата го запишуваме бројот $2ab-a-b+1$. Оваа постапка ја повторуваме се додека на таблата не остане само еден број. Определи кои броеви може да бидат последниот број кој ќе биде запишан на таблата.

Решение. Да забележиме дека за секои два броја a и b важи:

$$2(2ab-a-b+1)-1=(2a-1)(2b-1). \tag{1}$$

Да го разгледаме производот $(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_n-1)$, каде $a_1,a_2,...,a_n$ се броевите кои во даден момент се наоѓаат на таблата. Од (1) следува дека овој производ е инваријантен при секој чекор. Имено, ако во некој чекор ги избришеме броевите a_1 и a_2 тогаш на нивно место го запишуваме бројот $2a_1a_2-a_1-a_2+1$, па споменатиот производ по овој чекор ќе биде

$$(2(2a_1a_2-a_1-a_2+1)-1)(2a_3-1)...(2a_n-1)=(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_n-1).$$

Според тоа, ако бројот што ќе остане на таблата го означиме со N, тогаш важи

$$2N-1=(\tfrac{2\cdot 49}{1}-1)(\tfrac{2\cdot 49}{2}-1)...(\tfrac{2\cdot 49}{97}-1)=\tfrac{97}{1}\cdot\tfrac{97}{2}\cdot...\cdot\tfrac{1}{97}=1$$

од каде добиваме дека $N=1$. ■

Задача 11. Нека $S(n)$ е збирот на цифрите на природниот број n. Да се определат сите n за кои важи

$$n+S(n)+S(S(n))=2009.$$

Решение. Од критериумот за деловост со 3 имаме $S(n)\equiv n(\mathrm{mod}\,3)$, т.е. бројот $S(n)$ кој се добива од бројот n во еден чекор е инваријанта по модул 3. Значи, $n\equiv S(n)\equiv S(S(n))(\mathrm{mod}\,3)$, од каде следува

$$2\equiv 2009=n+S(n)+S(S(n))\equiv 3n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3),$$

што не е можно. Значи не постои n, за кој важи $n+S(n)+S(S(n))=2009$.

Задача 12. Компјутер ги врши следниве операции:

1° Парот (a,b) го трансформира во парот $(a+1,b+1)$.

2° Ако a и b се парни, тогаш парот (a,b) го трансформира во $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$.

3° Од паровите (a,b) и (b,c) може да го добие парот (a,c).

Дали е можно компјутерот со комбинација на претходно опишаните операции, од парот $(5,19)$ да го добие парот $(17,2009)$. (Компјутерот ги има на располагање сите добиени парови до тој момент)

Решение. При првата операција $(a,b)\to(a+1,b+1)$, имаме

$$(a+1)-(b+1)=a-b. \qquad (1)$$

При втората $(a,b)\to(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$ имаме

$$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}. \qquad (2).$$

При третата операција (a,b), $(b,c)\to(a,c)$ имаме

$$a-c=(a-b)+(b-c). \qquad (3)$$

Нека сега $p\neq 2$ е прост делител на разликата на даден пар (x,y), т.е. $p\,|\,x-y$. Тогаш поради (1), (2) и (3) имаме дека $p\,|\,a-b$ каде (a,b) е било кој новодобиен пар тргнувајќи од парот (x,y).

Сега бидејќи $7\,|\,5-19$ мора да важи $7\,|\,17-2009=-1992=7\cdot(-285)+3$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека од парот $(5,19)$ не може да се добие парот $(17,2009)$.■

Задача 13. На таблата се запишани неколку знаци $+$ и неколку знаци $-$. Во еден чекор дозволено е да избришеме два знака, а на нивно место на таблата запишуваме $+$, ако знаците се истородни и $-$ ако избраните знаци се разнородни. Докажи дека знакот кој што на крајот останува на таблата не зависи од редоследот на бришење на знаците.

Решение. Знаците $+$ и $-$ да ги замениме со $+1$ и -1, соодветно. Нека на таблата имаме a броеви еднакви на $+1$, и b броеви еднакви на -1. Производот на броевите е $P=(-1)^b$. По првиот чекор тој производ може да биде

$1^{a-1}(-1)^b=(-1)^b$, $1^{a+1}(-1)^{b-2}=(-1)^{b-2}=(-1)^b$ или $1^{b-1}(-1)^{b-1}(-1)=(-1)^b$,

т.е. знакот на производот на броевите на таблата не се менува по било кој чекор. Последното значи дека знакот кој што кој што на крајот останува на таблата не зависи од редоследот на бришење на знаците. ■

Задача 14. Даден е квадратниот полином ax^2+bx+c, каде $a,b,c\in\mathbb{R}$. Дозволени се следниве операции:

1° a и c да ги заменат местата.

2° Променливата x може да се замени со $x+t$, каде t е било кој реален број.

Дали со помош на овие операции од полиномот x^2-x-2 може да се добие полиномот x^2-2x-1?

Решение. Нека е даден полиномот ax^2+bx+c, тогаш неговата дискриминанта е $D=b^2-4ac$.

По првата операција го добиваме полиномот cx^2+bx+a чија дискриминанта е $D=b^2-4ac$. Значи D е инваријанта при првата операција.

Нека на полиномот ax^2+bx+c ја примениме втората операција. Тогаш се добива полиномот

$$a(x+t)^2+b(x+t)+c=ax^2+(2at+b)x+at^2+bt+c,$$

каде t е призволен реален број, и имаме

$$D=(2at+b)^2-4a(at^2+bt+c)=b^2-4ac.$$

Значи D и при втората операција останува инваријанта.

Според тоа, при двете операции D е инваријанта. Сега, x^2-x-2 има дискриминанта $D_1=9$, а x^2-2x-1 има дискриминанта $D_2=8$ следува дека со помош на наведените операции од полиномот x^2-x-2 не може да се добие полиномот x^2-2x-1. ■