ЈБМО 1999

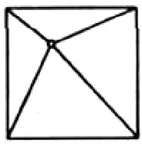
1. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои постојат реални броево x и y такви што
$$a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0, c^3+cx+y=0.$$
Докажи, дека
$$a+b+c=0.$$
Решение. Ако од првото равенство го одземеме второто добиваме
$$\begin{aligned}0&=a^3+ax+y-b^3-bx-y\\&=a^3-b^3+x(a-b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2+x),\end{aligned}$$
па бидејќи $a\neq b$, добиваме дека важи
$$a^2+ab+b^2+x=0.$$
Аналогно, ако од првото равенство го одземеме третото добиваме
$$a^2+ac+c^2+x=0.$$
Сега, со одземање на последните две равенства наоѓаме
$$0=ab+b^2-ac-c^2=(b-c)(b+c)+a(b-c)=(b-c)(a+b+c).$$
Конечно, бидејќи $b\neq c$, од последното равенство следува
$$a+b+c=0.$$

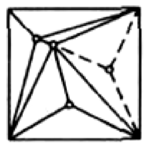
2. Нека $A_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$, за $n=0,1,2,...,1999$. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0,A_1,...,A_{1999}$.

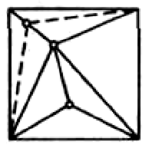
Решение. Бидејќи $A_0=2^0+3^2+5^2=35$, заклучуваме дека најголемиот заеднички делтел може да биде 35,7,5 или 1.
За $n=1$ имаме $A_1=2^3+3^8+5^8=397194$ и како овој број не е делив со 5, заклучувамедека броевите 5 и 35 не може да бидат бараниот најголем заеднички делител. Значи, останува да се провери деливоста со бројот 7. Бидејќи
$$A_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}=8^n+9\cdot 27^{2n}+25\cdot 125^{2n}$$
и $8\equiv 1 \pmod 7$, $27\equiv -1 \pmod 7$ и $125\equiv -1 \pmod 7$, добиваме
$$A_n\equiv 1^n+9\cdot(-1)^{2n}+25\cdot(-1)^{2n}=1+9+25=35\equiv 0 \pmod 7.$$
Според тоа, $(A_0,A_1,...,A_{1999})=7$.

3. Даден е квадрат S со должина на страна 20. Нека M е множество чии елементи се четирите темиња на квадратот S и 1999 произволни внатрешни точки на квадратот S. Докажи дека постои триаголник со темиња во множеството M чија плоштина е помала или еднаква на $\frac{1}{10}$.

Решение. Ќедокажеме дека квадратот може да се раздели на триаголници со темиња од множеството M и ќе го определиме бројот на тие триаголници. Тоа ќе го направиме со додавање една по една на 1999-те внатрешни точки.


Цртеж 1


Цртеж 2


Цртеж 3

Првата точка го дел квадратот на четири триаголници (цртеж 1). Секоја нова точка припаѓа на внатрешноста на опредлен триаголник (цртеж 2) или припаѓа на некои два соседни претходно определени триаголници (цртеж 3). Во првиот случај со додавање на нова точка бројот на триаголниците се зголемува за 2 (еден стра триаголник се заменува со 3 нови), а во вториот случај со додавање на нова точка повторно бројот на триаголниците се зголемува за 2 (два стари се заменуваат со 4 нови). Затоа со додавање на последната 1999-та точка квадратот ќе биде поделен на $4+1998\cdot 2=4000$ триаголници. Бидејќи плоштината на квадратот е $20\cdot 20=400$, добиваме дека барем еден од делбените триаголници има плоштина помала или еднаква на $\frac{400}{4000}=\frac{1}{10}$.

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB}=\overline{AC}$. Нека D е произволна точка на отсечката BC таква што $\overline{BC}>\overline{BD}>\overline{DC}>0$. Нека k_1 и k_2 се опишаните кружници соодветно околу триаголниците ABD и ADC. Нека BB' и CC' се соодветно дијаметри на кружниците k_1 и k_2, и M е средина на отсечката $B'C'$. Докажи дека плоштината на триаголникот MBC е константна, односно дека не зависи од положбата на точката D.

Решение. Нека O_1 и O_2 се соодветно центрите на кружниците k_1 и k_2. Бидејќи $\measuredangle CAD<\measuredangle BAD$, добиваме $\measuredangle CAD<90^\circ$. Затоа точките O_2 и A

се на иста страна од отсечката CD, па затоа и точките C' и A се од иста страна на отсечката CD.

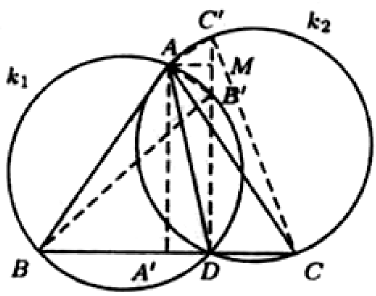
а) Нека $\measuredangle BAD < 90^\circ$ (цртеж 1). Тогаш точките O_1 и A со од иста страна на отсечката BD, па затоа и точките B' и A се од иста страна на отсечката BD.

1) Бидејќи BB' е дијаметар на k_1, важи $\measuredangle BDB' = 90^\circ$. Слично, CC' е дијаметар на k_2, па затоа $\measuredangle CDC' = 90^\circ$. Според тоа, $B'D \perp BC$ и $C'D \perp BC$, па затоа точките B', D и C' се колинеарни.

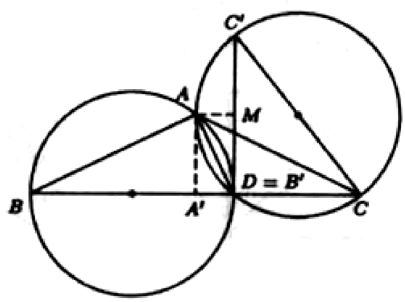
2) Нека $\measuredangle ABB' = \varphi$. Тогаш $\measuredangle ADB' = \varphi$ како периферики агол на ист лак AB' на кружницата k_1. Ако $\measuredangle ADB' = \measuredangle ADC' = \varphi$, тогаш имаме $\measuredangle ACC' = \varphi$ како периферики агол на ист лак AC' на кружницата k_2.

3) Триаголниците ABB' и ACC' се складни, бидејќи и двата се правоаголни ($\measuredangle BAB' = 90^\circ = \measuredangle CAC'$), $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\measuredangle ABB' = \measuredangle ACC' = \varphi$. Од складноста на овие триаголници следува $\overline{AB'} = \overline{AC'}$, што значи дека триаголникот $AB'C'$ е рамнокрак.

4) Бидејќи $\overline{MB'} = \overline{MC'}$, добиваме $AM \perp B'C'$, па затоа $AM \parallel BC$. Тогаш $P_{\triangle BMC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DM}}{2} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AA'}}{2} = P_{\triangle ABC}$. Значи, плоштината на триаголникот MBC е константна, односно дека не зависи од положбата на точката D.



Цртеж 1



Цртеж 2

б) Ако $\measuredangle BAD = 90^\circ$ или $\measuredangle BAD > 90^\circ$, тогаш распоредот на точките не е ист како во случајот а), но тврдењето на задачата е точно. Решението на задачата во овој случај го оставаме на читателот за вежба.