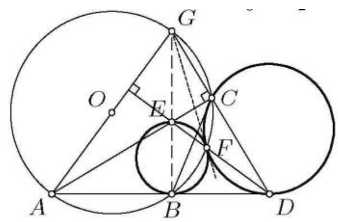
БМО 2012

1. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O такви што $\measuredangle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB и нормалата на правата AC во точката C. Нека l е нормалата повлечена од точката D на правата AO, E е пресечната точка на правите l и AC, а F е онаа точка на пресекот на кружницата Γ и правата l која се наоѓа меѓу точките D и E. Докажи, дека кружниците опишани околу триаголниците BFE и CFD се допираат во точката F.



Решение. Нека G е точката на Γ дијаметрално спротивна на A. Точката E е ортоцентар на триаголникот DAG, па затоа G лежи на правата BE. Бидејќи $\measuredangle CDF = \measuredangle GAC = \measuredangle GFC$ и $\measuredangle FBE = \measuredangle FAG = \measuredangle GFE$, правата FG е заедничка тангента на кружниците CFD и BFE, па затоа овие кружници се допираат во точката F.

2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\sum_{cyc} (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq 4(xy+yz+zx) .$$

Збирот на левата страна на горното неравенство е еднаков на

$$(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} + (y+z)\sqrt{(z+x)(x+y)} + (z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)} .$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(z+x)(z+y) \geq (z+\sqrt{xy})^2 ,$$

од каде добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} (x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} &\geq \sum_{cyc} [(x+y)z + (x+y)\sqrt{xy}] \\ &\geq \sum_{cyc} [(x+y)z + 2xy] \\ &= 4(xy+yz+zx).\end{aligned}$$

Втор начин. Ако го квадрираме неравенството

$$(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq 2xy+yz+zx , \tag{1}$$

Со елементарни трансформации добиваме дека тоа е еквивалентно со очигледното неравенство

$$(xy+yz+zx)(x-y)^2 \geq 0 .$$

Аналогно добиваме дека се точно неравенствата

$$(y+z)\sqrt{(z+x)(x+y)} \geq 2yz+zx+xy \tag{2}$$

$$(z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq 2zx+zy+yz . \tag{3}$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1), (2) и (3) го добиваме бараното неравенство.

3. Нека n е природен број и нека
$$P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, ..., 2\cdot 3^{n-1}, 3^n\}.$$
За секое подмножество X од множеството P_n со S_X да го означиме збирот на сите елементи од множеството X, при што $S_\varnothing = 0$, каде $\varnothing$ е празното множество. Нека y е реален број таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Докажи, дека постои подмножество Y на множеството P_n такво што $0 \le y - S_Y < 2^n$.

Решение. *Прв начин*. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по N. Очигледно тврдењето важи за $n = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$. Нека е даден y таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Можни се следниве случаи:

1) $0 \le y \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$. Од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' = \{2t \mid t \in Y'\}$.

2) $2\cdot 3^n - 2^{n+1} \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Тогаш $0 < 3^n - 2^{n+1} \le y - 3^n \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$, па од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y-3^n}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' \cup \{3^n\}$.

Според тоа, тврдењето важи и за n. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број.

Втор начин. Имаме $S_{P_n} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, па ако сите елементи на P_n ги поделиме со 2^n задачата се сведува на следнава еквивалентна задача:

Нека n е природен број, $a = \frac{3}{2}$ и $Q_n = \{1, a, a^2, ..., a^n\}$. Докажи дека за секој реален број $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$ постои подмножество X на Q_n за кое $0 < x - S_X < 1$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n = 1$ имаме $S_\varnothing = 0$, $S_{\{1\}} = 1$, $S_{\{a\}} = \frac{3}{2}$ и $S_{\{1,a\}} = \frac{5}{2}$, т.е. тврдењето очигледно е точно.

Нека тврдењето е точно за n и нека $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n + a^{n+1}]$ е произволен. Ако $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$, од индуктивната претспоставка имаме дека постои множество $X \subset Q_n \subset Q_{n+1}$ за кое $0 < x - S_X < 1$.

Нека $x > 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Бидејќи $\frac{a^{n+1}-1}{a-1} > a^{n+1}$, заклучуваме дека $x_1 = x - a^{n+1} \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$. Сега, од индуктивната пшретпоставка следува дека постои $X_1 \subset Q_n$ таков што $0 < x_1 - S_{X_1} < 1$, па затоа доволно е да земеме $X = X_1 \cup \{a^{n+1}\}$.

4. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат условите
   1) $f(n!) = f(n)!$, за секој $n \in \mathbb{N}$,
   2) $m - n$ е делител на $f(m) - f(n)$, за секои $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

   Решение. Од $f(1) = f(1)!$ и $f(2) = f(2)!$ следува $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$.

   Нека претпоставиме дека $f(3) = 3$. Ако индуктивно дефинираме $n_0 = 3$ и $n_{i+1} = n_i!$, за $i \geq 0$, добиваме дека $f(n_i) = n_i$, за секој i. Нека m е произволен природен број. Бидејќи разликата $m - n_i$ е делител на $f(m) - f(n_i)$, добиваме дека $m - n_i$ е делител на

$$f(m) - m = f(m) - f(n_i) + f(n_i) - m = f(m) - f(n_i) + n_i - m,$$

   за секој i. Според тоа, $f(m) - m$ има бесконечно многу делители, што значи дека $f(m) = m$, за секој m.

   Сега нека $f(3) \neq 3$. Од $4 = 3! - 2 \mid f(3)! - f(2)$ следува дека $4 \nmid f(3)!$, па затоа $f(3) \in \{1, 2\}$. Освен тоа, $n! - 3$ е делител на $f(n)! - f(3)$ за секој $n \geq 4$, па затоа $3 \nmid f(n)!$, од што следува дела $f(n) \in \{1, 2\}$, за секој n. Сега лесно се докажува дека во случајов $f(n)$ мора да е константа.

   Конечно, единствени решенија се функциите $f \equiv 1, f \equiv 2$ и $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{N}$.