

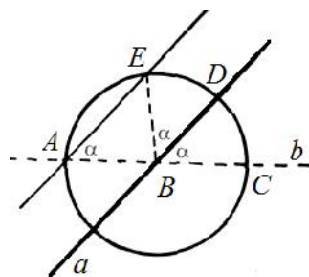
Ристо Малчески
Скопје

РЕШАВАМЕ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ (ВТОР ДЕЛ)

Во [8] е дадена постапката за решавање конструктивни задачи, која се состои од: анализа, конструкција, доказ и дискусија. Исто така се решени четири задачи, во кои постапката е целосно применета. Во оваа статија, која на извесен начин е продолжение на статијата [8], ќе решиме поголем број конструктивни задачи. Притоа, во задачите за кои сметаме дека се елементарни нема целосно да ја реализираме спомената постапка, па затоа на читателот му препорачуваме тоа самостојно да го направи. Во следните разгледувања, кога станува збор за $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки.

1. Дадени се точка A и права a ($A \notin a$). Низ точката A конструирај права која е паралелна со правата a .

Решение. *Прв начин.* Низ точката A повлекуваме произволна права b која ја сече правата a во точката B , а потоа конструираме кружница $k(B, \overline{BA})$, цртеж десно. Лакот $\widehat{CD}$ на кружницата k , на кој му соодветствува централен агол α , уште еднаш го пренесуваме на кружницата,

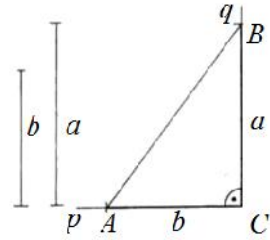


т.е. наоѓаме точка E таква што $\widehat{CD} = \widehat{DE}$. Така добиваме централен агол $\angle CBE = 2\alpha$, на кој му соодветствува перифериски агол $\angle CAE = \alpha$. Сега, бидејќи $\angle CAE = \alpha = \angle CBD$, од теоремата за трансферзалата следува дека правите BD и AE се паралелни, односно дека AE е бараната права.

Втор начин. На правата a земаме произволни точки M и N . Конструираме паралелограм $AMNP$, за кој ни се познати должините на соседните страни $\overline{AM}$ и $\overline{MN}$, и аголот меѓу нив $\angle AMN$. Од својствата на паралелограмот следува дека $AP \parallel MN \equiv a$, т.е. правата AP е бараната прав. ■

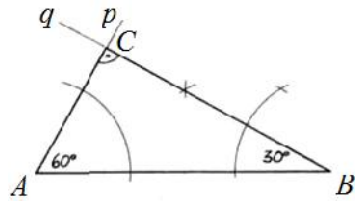
2. Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ ако се дадени должините на неговите катети $\overline{AC} = b$ и $\overline{BC} = a$.

Решение. Конструираме прав агол $\angle pCq$ (цртеж десно). Потоа на кракот Cp на $\angle pCq$ наоѓаме A таква што $\overline{CA} = b$, а на кракот Cq на $\angle pCq$ наоѓаме точка B таква што $\overline{CB} = a$. Сега, ја повлекуваме хипотенузата AB , со што бараниот триаголник е конструиран. ■



3. Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ ако се дадени должината на неговата хипотенуза $\overline{AB} = c$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

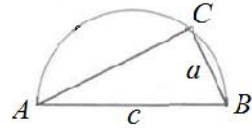
Решение. Прво цртаме отсечката AB , $\overline{AB} = c$. Понатаму, од $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle BCA = 90^\circ$ следува $\angle ABC = 30^\circ$, па затоа во точката A конструираме агол $\angle BAp = 60^\circ$, а во точката B кон-



струираме агол $\angle ABq = 30^\circ$. Конечно, наоѓаме $C = Ap \cap Bq$, со што $\triangle ABC$ е конструиран. ■

4. Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ ако се дадени должините на неговата хипотенуза c и едната негова катета a .

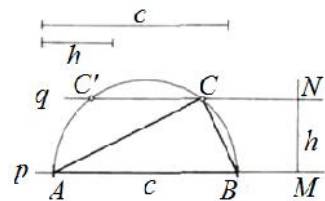
Решение. Како што знаеме, темето C на правиот агол на правоаголникот $\triangle ABC$ припаѓа на полукружницата со дијаметар $\overline{AB} = c$. Оттука ја имаме следнава конструкција: над отсечката



AB , $\overline{AB} = c$ како над дијаметар конструираме полукружница (види цртеж), а потоа потоа од темето B со радиус a ја пресекуваме оваа полукружница и во пресекот го добиваме темето на правиот агол C . Ги повлекуваме отсечките AC и BC , со што триаголникот ABC е конструиран. ■

5. Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ ако се дадени должините на неговата хипотенуза c и висината h повлечена кон хипотенузата.

Решение. Конструкција. На произволна права p нанесуваме отсечка AB со должина $\overline{AB} = c$ и во произволна точка M на правата p повлекуваме нормала, на која цртаме отсечка MN со должина



$\overline{MN} = h$. На страната од правата p на која е точката N опишуваме над отсечката AB како над дијаметар полукружница и низ точката N повлекуваме права q паралелна со правата p . Правата q ја сече полукружницата во точките C и C' . Ако било која од овие две точки ја поврземе со со точките A и B , го добиваме бараниот триаголник.

Доказ. Имаме $\overline{AB} = c$, $\angle ACB$ е перифериски агол над дијаметарот AB , што значи дека тоа е прав агол и висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето C е еднаква на растојанието $\overline{MN} = h$ меѓу паралелните прави p и q , што значи дека $\triangle ABC$ е бараниот триаголник.

Дискусија. На правата p отсечката AB со должина $\overline{AB} = c$, полукружницата над дијаметар AB и правата q на растојание h од правата p може секогаш да се конструираат. Значи, задачата има:

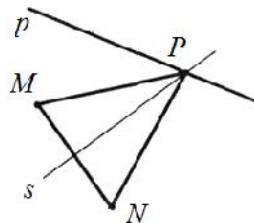
- а) две решенија ако полукружницата и правата q се сечат во две точки,
- б) едно решение ако полукружницата и правата q се допираат, и
- в) нема решение ако полукружницата и правата q немаат заеднички точки. ■

6. Дадени се права p и точки M и N . Конструирај рамнокрак $\triangle MNP$ со основа MN и врв P кој припаѓа на правата p .

Решение. Анализа. Врвот на P рамнокракиот $\triangle MNP$ припаѓа на симетралата s на основата MN . Но, тој треба да припаѓа на правата p , па затоа $P = p \cap s$.

Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката MN и наоѓаме $P = p \cap s$. Ги цртаме отсечките MP и NP . Триаголникот MNP е бараниот триаголник.

Доказ. Отсечката MN е основа на $\triangle MNP$, а s е нејзина симетрала. Секоја точка од симетралата на дадена отсечка е еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката. Бидејќи точката P припаѓа на симетралата s на отсечката MN , важи $\overline{MP} = \overline{NP}$, што значи дека $\triangle MNP$ е рамнокрак и како $P \in p$, тоа е бараниот триаголник.



Дискусија. Ако $MN \perp p$, тогаш $s \parallel p$, па затоа ако $s \equiv p$, задачата има бесконечно многу решенија, а ако $s \neq p$, задачата нема решение. Ако MN и p не се заемно нормални, тогаш s и p не се паралелни, па затоа тие се сечат во точка P , т.е. задачата има единствено решение. ■

Забелешка 1. Претходната задача може да се формулира и на следниов начин: На дадена права p определи точка P која е еднакво оддалечена од дадени точки M и N .

7. Дадени се кружница k и точки M и N . Конструирај рамнокрак $\triangle MNP$ со основа MN и врв P кој припаѓа на кружницата k .

Решение. *Анализа.* Врвот P на рамнокракиот $\triangle MNP$ припаѓа на симетралата s на основата MN . Но, тој треба да припаѓа на кружницата k , па затоа $P = k \cap s$.

Конструкција. Ја конструираме симетралата s на отсечката MN и наоѓаме $P = k \cap s$. Ги цртаме отсечките MP и NP . Триаголникот MNP е бараниот триаголник.

Доказ. Отсечката MN е основа на $\triangle MNP$, а s е нејзина симетрала. Секоја точка од симетралата на дадена отсечка е еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката. Бидејќи точката P припаѓа на симетралата

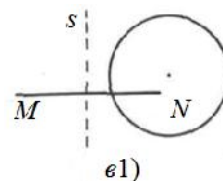
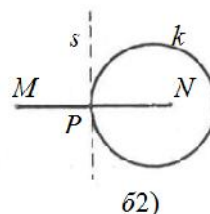
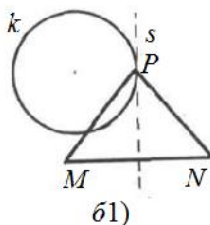
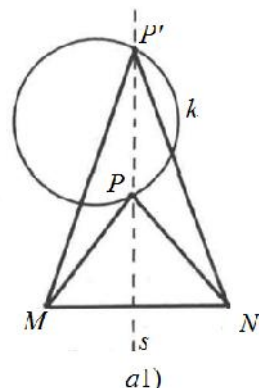
s на отсечката MN , важи $\overline{MP} = \overline{NP}$, што значи дека $\triangle MNP$ е рамнокрак и како $P \in k$, тоа е бараниот триаголник.

Дискусија. Бидејќи права и кружница може да имаат две или една заедничка точка, или да немаат заедничка точка, задачата може да има две, едно или да нема решение.

а) Ако k и s се сечат во две точки, тогаш задачата има две решенија (цртеж а1).

б) Ако k и s имаат една заедничка точка (се допираат) задачата може да има едно решение (цртеж б1)) или да нема решение (цртеж б2)).

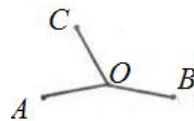
в) Ако k и s немаат заеднички точки, задачата нема решение (цртеж в1)). ■



Забелешка 2. Претходната задача може да се формулира и на следниов начин: На дадена кружница k определи точка P која е еднакво оддалечена од дадени точки M и N .

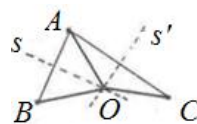
8. Дадени се три точки A, B и C . Определи точка O која е еднакво оддалечена од точките A, B и C .

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена, т.е. најдена е точката O која е еднакво оддалечена од точките A, B и C (цртеж десно). Бидејќи O е еднакво оддалечена од



A и B , таа лежи на симетралата на отсечката AB . Понатаму, точката O е еднакво оддалечена од точките A и C , па затоа таа лежи на симетралата на отсечката AC . Според тоа, точката O е пресекот на симетралите на отсечките AB и AC .

Конструкција. Прво ги конструираме симетралите s и s' соодветно на отсечките AB и AC (цртеж десно). Пресекот O на s и s' е бараната точка.



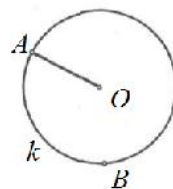
Доказ. Точката O припаѓа на симетралата s на отсечката AB , па затоа $\overline{OA} = \overline{OB}$. Понатаму, точката O припаѓа на симетралата s' на отсечката AC , па затоа $\overline{OA} = \overline{OC}$. Според тоа, за точката O важи $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, што значи дека тоа е бараната точка.

Дискусија. Ако точките A, B и C лежат на една права, тогаш $s \parallel s'$, па затоа симетралите s и s' не се сечат, што значи дека задачата нема решение. Ако точките A, B и C не лежат на една права, тогаш задачата има единствено решение. ■

Забелешка 3. За точката O од претходната задача важи $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, па затоа може да се конструира кружница со центар во O ги содржи точките A, B и C . Затоа претходната задача може да се формулира на следниов начин: *Конструирај кружница која минува низ три дадени точки A, B и C .*

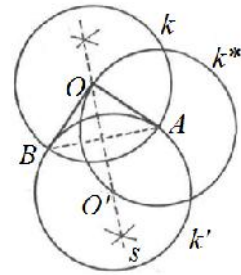
9. Конструирај кружница со даден радиус r која минува низ две дадени точки.

Решение. *Прв начин. Анализа.* Нека кружницата k со центар O е бараната кружница, а точките A и B се дадените точки кои лежат на неа (цртеж



десно). Бидејќи радиусот на кружницата е познат, доволно е да го определиме нејзиниот центар. Точките A и B лежат на k , па затоа центарот O на k е еднакво оддалечен од A и B , што значи дека тој лежи на симетралата на отсечката AB . Бидејќи е даден радиусот $\overline{AO} = r$, познато е и растојанието на центарот O на бараната кружница до дадената точка A . Сите точки кои се на растојание r од точката A припаѓаат на кружницата со центар A и радиус r . Значи, центарот O е во пресек на симетралата на отсечката AB и кружницата со центар A и радиус r .

Конструкција. Прво ја конструираме симетралата s на отсечката AB . Потоа конструираме кружница k^* со центар во точката A и радиус r . Со O и O' да ги означиме пресечните точки на симетралата s и кружницата k^* . Ги конструираме кружниците k и k' со центри во точките O и O' и радиус еднакви на r , со што се конструирани бараните кружници (цртеж десно).



Доказ. Доволно е да докажеме дека една од добиените кружници е бараната кружница. Точката O лежи на кружницата $k^*(A, r)$, па затоа $\overline{OA} = r$. Но, тоа значи дека $A \in k(O, r)$. Понатаму, точката O припаѓа на симетралата s на отсечката AB , па затоа $\overline{OB} = \overline{OA}$, т.е. $\overline{OB} = r$. Последното значи дека $B \in k(O, r)$. Според тоа, k минува низ дадените точки A и B , а неговиот радиус е еднаков на r , па тоа е бараната кружница.

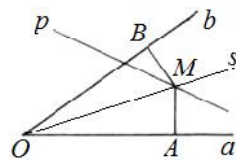
Дискусија. Ако $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$, тогаш задачата има две решенија, ако $r = \frac{1}{2}\overline{AB}$, тогаш задачата има едно решение и ако $r < \frac{1}{2}\overline{AB}$, тогаш задачата нема решение (направи цртежи).

Втор начин. Анализа. Центарот O на кружницата k која минува низ точките A и B и има радиус r можеме да го определиме како пресек на кружниците $k^*(A, r)$ и $k^{**}(B, r)$.

Обиди се самостојно целосно да ја реализираш постапката за конструкција на бараната кружница. ■

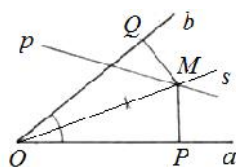
10. На дадена права определи точка која е еднакво оддалечена од краците на даден агол.

Решение. Анализа. Нека p е дадената права, $\angle aOb$ е дадениот агол, а M точката која се бара (цртеж десно). Нека A и B се подножјата на нормалите повлечени од точката M на краците Oa и Ob на $\angle aOb$. Притоа важи



$\overline{MA} = \overline{MB}$, па како сите точки кои се еднакво оддалечени од краците на еден агол припаѓаат на симетралата на тој агол, заклучуваме дека M припаѓа на симетралата на $\angle aOb$. Но, $M \in p$, па затоа M е пресечната точка на симетралата на $\angle aOb$ и правата p .

Конструкција. Прво ја конструираме симетралата на s на $\angle aOb$. Пресечната точка M на симетралата s и дадената права p е бараната точка (цртеж десно).

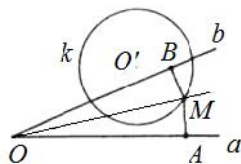


Доказ. Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од точката M соодветно на краците Oa и Ob . Бидејќи $M \in s$ важи $\overline{MP} = \overline{MQ}$ и како $M \in p$, заклучуваме дека тоа е бараната точка.

Дискусија. Ако правата p и полуправата s се сечат, тогаш задачата има единствено решение. Ако правата p и полуправата s се паралелни, но полуправата s не лежи на p , тогаш задачата нема решение, а ако полуправата s лежи на правата p , тогаш задачата има бесконечно многу решенија. ■

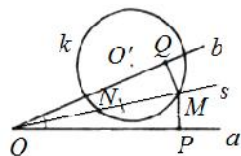
11. На дадена кружница најди точка која е еднакво оддалечена од краците на даден агол.

Решение. Анализа. Нека k е дадената кружница, $\angle aOb$ е дадениот агол и M е бараната точка (цртеж десно). Нека A и B се подножјата на нормалите повлечени од точката M на краците Oa и Ob на $\angle aOb$. Притоа важи $\overline{MA} = \overline{MB}$, па затоа M припаѓа на симетралата на $\angle aOb$. Но,



$M \in k$, па затоа M е пресечната точка на симетралата на $\angle aOb$ и кружницата k .

Конструкција. Прво ја конструираме симетралата на s на $\angle aOb$. Пресечната точка M на симетралата s и дадената кружница k е

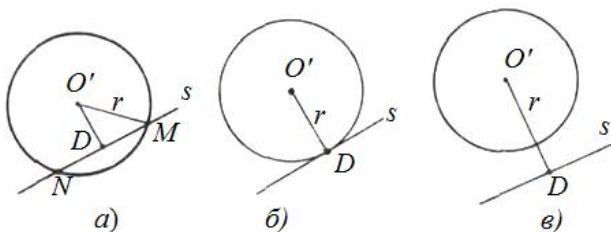


бараната точка (цртеж десно).

Доказ. Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од точката M соодветно на краците Oa и Ob . Бидејќи $M \in s$ важи $\overline{MP} = \overline{MQ}$ и како $M \in k$, заклучуваме дека тоа е бараната точка.

Дискусија. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката O' на симетралата s на аголот $\angle aOb$.

а) Ако кружницата k и симетралата s се сечат во две точки M и N , т.е. ако $\overline{O'D} < r$, тогаш задачата има две решенија (цртеж а)).

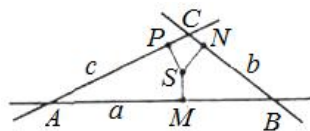


б) Ако кружницата k и симетралата s се допираат, т.е. ако $\overline{O'D} = r$, тогаш задачата има едно решение (цртеж б)).

в) Ако кружницата k и симетралата s немаат заеднички точки, т.е. ако $\overline{O'D} > r$, тогаш задачата нема решение (цртеж в)). ■

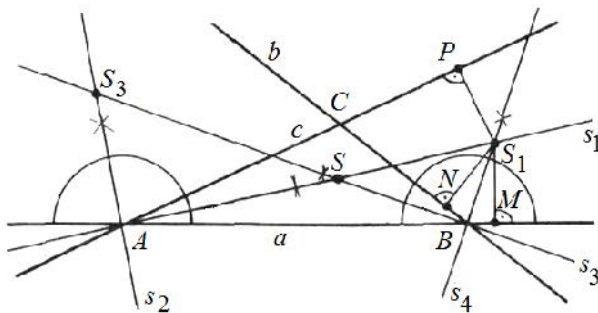
12. Дадена се прави a, b и c . Определи точка која е еднакво оддалечена од правите a, b и c .

Решение. Анализа. Нека правите a, b и c не се сечат во една точка, туку две по две се сечат во точките A, B и C . Нека S е бараната точка, а P, M и N се под-



ножјата на нормалите повлечени од точката S на правите a, b и c , соодветно. Бидејќи точката S е на еднакво растојание од правите a и c , таа припаѓа на симетралата на агол определен со овие две прави, а бидејќи е на еднакво растојание од правите a и b , таа припаѓа на симетрала на агол определен со овие две прави. Според тоа, точката S е пресечна точка на овие две симетрали.

Конструкција. Прво ги конструираме симетралите на s_1 и s_2 на напоредните агли определени со правите a и c (види цртеж). Потоа ги конструираме симетралите s_3 и s_4 на напоредните агли определени со правите a и b . Означуваме $s_1 \cap s_3 = S$, $s_1 \cap s_4 = S_1$, $s_2 \cap s_4 = S_2$ и $s_2 \cap s_3 = S_3$, со што ги добиваме бараните точки.

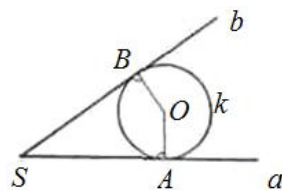


Доказ. Нека M, N, P се подножјата на нормалите повлечени од точката S_1 на правите a, b, c , соодветно. Точката S_1 припаѓа на симетралата s_4 , па затоа таа е еднакво оддалечена од правите a и b , т.е. $\overline{S_1M} = \overline{S_1N}$. Понатаму, точката S_1 припаѓа на симетралата s_1 , па затоа таа е еднакво оддалечена од правите a и c , т.е. $\overline{S_1M} = \overline{S_1P}$. Значи, $\overline{S_1M} = \overline{S_1N} = \overline{S_1P}$, т.е. точката S_1 е еднакво оддалечена од правите a, b, c . Аналогно се докажува дека и точките S, S_2 и S_3 се еднакво оддалечени од правите a, b, c .

Дискусија. Ако трите прави a, b и c се сечат во една точка, тогаш тоа е бараната точка. Ако трите прави a, b и c се сечат две по две, тогаш постојат четири точки кои се еднакво оддалечени од секоја од трите прави. $a \parallel b \parallel c$, тогаш задачата нема решение, а ако две од правите се паралелни, на пример $a \parallel b$, а третата прави ги сече, тогаш постојат две решенија на задачата. ■

13. Конструирај кружница која ги допира краците на даден агол, при што едниот крак го допира во дадена точка.

Решение. Анализа. Нека задачата е решена и k е бараната кружница која ги допира краците на $\angle aSb$ така што A е дадената точка (цртеж десно). Нека B е подножната точка на нормалата повлечена од центарот O на k на кракот Sb .



Кружницата ги допира краците на $\angle aSb$, па затоа $\overline{OA} = \overline{OB}$, т.е. O лежи на симетралата на $\angle aSb$. Понатаму, бидејќи $OA \perp SB$, заклучуваме дека O лежи на нормалата на кракот Sa во точката A .

Конструкција. Нека е даден $\angle aSb$ и на кракот Sa точка A . Ги конструираме симетралата s на $\angle aSb$ и нормалата n на кракот Sa

во точката A . Правите s и n се сечат во точката O . Конструираме кружница $k(O, \overline{OA})$. Тоа е бараната кружница.

Доказ. Со B да го означиме подножјето на нормалата повлечена од точката O на кракот Sb . Точката O припаѓа на нормалата n , па затоа важи $OA \perp Sa$, што значи дека кружницата k го допира кракот Sa во точката A . Точката O припаѓа на симетралата s , па затоа $\overline{OA} = \overline{OB}$, што значи дека и точката B припаѓа на k . Бидејќи $OB \perp Sb$, заклучуваме дека кракот Sb е тангента на k . Според тоа, конструираната кружница k ги допира краците на дадениот $\angle aSb$ и минува низ дадената точка A , т.е. тоа е бараната кружница.

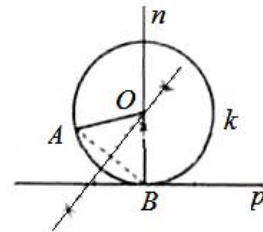
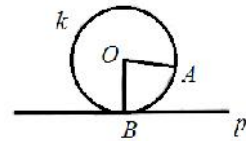
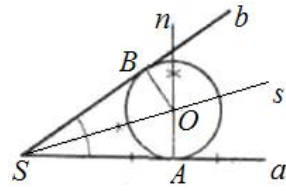
Дискусија. Правите s и n секогаш се сечат во една точка, па затоа задачата има едно и единствено решение. ■

14. Конструирај кружница која допира дадена права во дадена точка и минува низ друга дадена точка.

Решение. *Анализа.* Нека кружницата k со центар O е бараната кружница која минува низ точката A и ја допира правата p во точката B (цртеж десно). Од $A, B \in k$ следува дека центарот O на k припаѓа на симетралата s на отсечката AB . Понатаму, правата p ја допира кружницата k во точката B , па затоа центарот O на k лежи на нормалата на p повлечена во точката B .

Конструкција. Нека се дадени права p , на неа точка B и надвор од неа точка A . Ги конструираме нормалата n на p и симетралата s на отсечката AB . Правите n и s се сечат во точката O . Конструираме кружница $k(O, \overline{OA})$ и тоа е бараната кружница.

Доказ. Бидејќи $O \in s$, важи $\overline{OA} = \overline{OB}$, а како растојанието од точката B до центарот на кружницата е еднакво на радиусот на кружницата добиваме дека $B \in k$. Понатаму, $O \in n$ и $n \perp p$, па затоа правата p е тангента на k во точката B . Конечно, од претходните разгледувања следува дека k е бараната кружница.



Дискусија. Ако точката A не лежи на правата p , тогаш правите s и n се сечат во една точка, па затоа задачата има единствено решение. Ако точката A лежи на правата p , тогаш $s \parallel n$, па затоа задачата нема решение. ■

Задачи за самостојна работа

1. Конструирај правоаголен триаголник за кој се дадени една негова катета и еден остар агол.
2. Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ ако се дадени отсецоците $p = \overline{AD}$ и $q = \overline{BD}$ на кои висината CD , $D \in AB$ ја дели хипотенузата AB .
3. Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ ако се дадени една негова катета a и висината h повлечена кон хипотенузата.
4. Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ ако се дадени неговата катета $b = \overline{AC}$ и отсечката $p = \overline{AD}$, каде D е подножјето на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB .
5. Дадени се две прави p и p' , и на правата p отсечка AB . Конструирај правоаголен $\triangle ABC$ со хипотенуза AB така што темето C припаѓа на правата p' .
6. Дадени се точка A и права p . Конструирај рамностран $\triangle ABC$ таков што страната BC припаѓа на правата p .
7. Дадени се точка A и отсечка BC . Конструирај кружница која минува низ точката A и има тетива BC .
8. Дадени се три прави a, b и c . На правата c најди точка која е еднакво оддалечена од правите a и b .
9. На дадена кружница k определи точка која е еднакво оддалечена од дадени прави a и b .
10. Низ дадена точка која лежи во внатрешноста на даден агол повлечи права која од краците на аголот отсекува еднакви отсечки.
11. Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени должината на висината повлечена кон хипотенузата и точка која припаѓа на едната катета.
12. Конструирај правоаголен триаголник ако се познати должините на симетралата на правиот агол и едната катета.
13. Конструирај кружница која допира три складни дадени кружници.

14. Конструирај квадрат ако е даден збирот на страната и дијагоналата $a + d$.

Литература

1. Bandić, I.: O jednom konstruktivnom zadatku iz planimetrije, Matematički list, Beograd
2. Lazić, D.: Konstruisanje pravouglog trougla, Matematički list, Beograd
3. Вукадиновић, Ј.: Решавање конструктивних задатака II, Математички лист, Београд
4. Вукадиновић, Ј.: Решавање конструктивних задатака III, Математички лист, Београд
5. Вукадиновић, Ј.: Решавање конструктивних задатака IV, Математички лист, Београд
6. Главче, М., Аневска, К.: Решавање конструктивни задачи со помош на Питагоровата теорема, Математички талент, Скопје
7. Илић-Дајовић, М.: Решавање конструктивних задатака I, Математички лист, Београд
8. Малчески, Р.: Решаваме конструктивни задачи, Нумерус (Математички талент), Скопје