XL РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII одделение

1. Милан направил 10 чекори напред, па се вратил 2 чекори назад, потоа 10 напред и 1 назад, па повторно 10 напред и 2 назад итн. Колку чекори треба да направи Милан, за да од почетното место да се оддалечи 1000 чекори?

Решение. Со 10 чекори напред и 2 назад, па потоа 10 напред и 1 назад Милан прави 23 чекори, а се оддалечува 17 чекори. Бидејќи

$$58\cdot 17=986<59\cdot 17=1003 \text{ чекори,}$$

тој ќе направи 58 вакви циклуси во кои ќе помине $58\cdot 23=1334$ чекори. Преостанатите 14 чекори ќе ги помине користејќи $10+2+6=18$ чекори. Значи, Милан ќе направи вкупно $1334+18=1356$ чекори.

2. Во одделот за изгубени работи минатата година се однесени 9900 чадори. Еден дел од луѓето изгубиле точно по еден чадор, но имало и такви кои изгубиле повеќе од еден чадор. Поточно, 4% од нив изгубиле точно по два чадори, $2,5\%$ изгубиле по три чадори, $0,5\%$ изгубиле по осум чадори, а останатите по еден чадор. Колку луѓе изгубиле барем по еден чадор?

Решение. Ако со x го означиме бројот на луѓето што изгубиле чадори, тогаш од условот на задачата имаме дека $0,04x$ изгубиле по два чадори, $0,025x$ изгубиле по три чадори, $0,005x$ изгубиле по осум чадори и

$$(1-(0,04+0,025+0,005)x=0,93x$$

изгубиле по еден чадор. Според тоа, бројот на изгубени чадори е

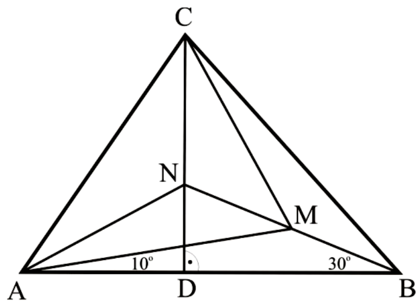
$$2\cdot 0,04x+3\cdot 0,025x+8\cdot 0,005x+1\cdot 0,93x=1,125x,$$

па затоа $1,125x=9900$, односно $x=\frac{9900}{1,125}=8800$. Значи, минатата година 8800 луѓе изгубиле барем по еден чадор.

3. По намалување на цената на една тетратка за петтина од цената, за 800 денари можело да се купи една тетратка повеќе отколку пред намалувањето за 900 денари. Колкава е цената на една тетратка?

Решение. Нека цената на една тетратка е x. Пред намалувањето на цената, за 900 денари можело да се купат вкупно $\frac{900}{x}$ тетратки. По намалувањето на цената за една петтина, за 800 денари можело да се купат $\frac{800}{x-\frac{1}{5}x}$ тетратки. Од условот на задачата бројот на тетратките во двата случаи се разликува за една, па $\frac{800}{x-\frac{1}{5}x}=\frac{900}{x}+1$. Од тука $\frac{800}{\frac{4}{5}x}=\frac{900+x}{x}$, односно $\frac{800\cdot 5}{4x}=\frac{900+x}{x}$ или $\frac{4000}{4x}=\frac{900+x}{x}$. Сега $\frac{1000}{x}=\frac{900+x}{x}$, односно $1000=900+x$. Оттука, цената на една тетратка е $x=100$ денари.

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC, така што $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle ACB=80^{\circ}$. Во внатрешноста на триаголникот ABC е избрана точка M, така што $\measuredangle MBA=30^{\circ}$ и $\measuredangle MAB=10^{\circ}$. Пресметај ја големината на $\measuredangle AMC$.



Решение. Нека со D го означиме подножјето на висината спуштена од темето C кон основата AB, а со N пресечната точка на висината CD и страната BM. Од условот на задачата лесно се покажува дека

$\measuredangle CAB=\measuredangle CBA=50^{\circ}$ и $\measuredangle ACD=40^{\circ}$.

Бидејќи точката N лежи на висината CD, односно на симетралата на основата AB на рамнокракиот триаголник ABC, заклучуваме дека триаголникот ABN е рамнокрак, од каде што следува дека

$$\measuredangle NAB=\measuredangle NBA=30^{\circ} \text{ и } \measuredangle ANB=\measuredangle ANM=120^{\circ}.$$

Според тоа $\measuredangle NAM=20^{\circ}$. Оттука, $\measuredangle CAN=20^{\circ}$ и $\angle ANC=120^{\circ}$. Понатаму $\Delta ANC\cong\Delta ANM$, поради тоа што имаат заедничка страна $\overline{AN}$,

$$\measuredangle CAN=\measuredangle NAM=20^{\circ} \text{ и } \measuredangle ANC=\measuredangle ANM=120^{\circ}.$$

Од докажаната складност следува дека $\overline{AC}=\overline{AM}$. Тоа значи дека триаголникот AMC е рамнокрак. Од тоа што $\measuredangle CAM=40^{\circ}$ се добива дека $\measuredangle ACM=\measuredangle AMC=70^{\circ}$.

5. Докажи дека за било кои седумцифрени броеви со различни цифри во чиј запис се јавуваат цифрите $1,2,3,4,5,6,7$, едниот не може да биде делив со другиот.

Решение. Нека m и n се седумцифрени броеви со различни цифри во чиј запис се јавуваат цифрите 1,2,3,4,5,6,7. Ако $n|m$, тогаш $n|(m-n)$. Бидејќи збирот на цифрите на двата броја е еднаков, тие при делење со 9 даваат ист остаток, односно $n=9k+r$ и $m=9l+r$. Според тоа, $9|(m-n)$. Но, 3 не е делител на $1+2+3+4+5+6+7=28$, па затоа $\mathrm{NZD}(n,9)=1$, што заедно со претходно изнесеното значи дека $9n|(m-n)$. Последното е противречност, бидејќи $9n$ е осумцифрен број, а $m-n$ е најмногу седумцифрен број. Конечно, од добиената противречност следува дека $n\nmid m$.

VIII одделение

1. Определи ги сите парови цели броеви (a,b), $b\neq 1$ за кои важи дека $a=\frac{4b^2+5b+10}{b+1}$.

Решение. Со елементарни трансформации добиваме дека

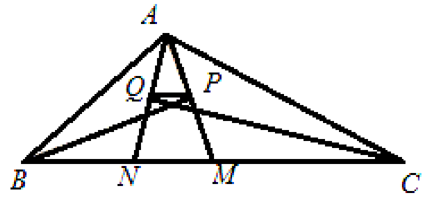
$$a=\frac{4b^2+5b+10}{b+1}=\frac{4b(b+1)+b+1+9}{b+1}=4b+1+\frac{9}{b+1},$$

што значи дека a е цел број ако и само ако $\frac{9}{b+1}$ е цел број, односно ако и само ако $b+1\in\{1,3,-3,9,-9\}$. Според тоа:

$$b+1=1 \quad\Rightarrow b=0, \quad a=10$$
$$b+1=3 \quad\Rightarrow b=2, \quad a=12$$
$$b+1=-3 \quad\Rightarrow b=-4, \quad a=-18$$
$$b+1=9 \quad\Rightarrow b=8, \quad a=74$$
$$b+1=-9 \quad\Rightarrow b=-10, \quad a=-40$$

2. Во триаголникот ABC имаме $\overline{AB}=2\,\mathrm{cm}$, $\overline{BC}=4\,\mathrm{cm}$ и $\overline{CA}=2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Нека P е точка која лежи на симетралата на аголот во темето B таква што AP е нормална на таа симетрала, а Q е точка која лежи на симетралата на аголот во темето C таква што AQ е нормална на таа симетрала. Пресметај ја должината на отсечката PQ.

Решение. Нека AP ја сече BC во точка M, а AQ ја сече BC во точка N. Тогаш триаголниците ABM и ACN се рамнокраки, па



затоа $\overline{BM}=2\,\text{cm}$ и $\overline{CN}=2\sqrt{2}$ cm. Од

$$\overline{BM}+\overline{CN}-\overline{NM}=\overline{BC},$$

Следува дека,

$$\overline{NM}=\overline{BM}+\overline{CN}-\overline{BC}=2+2\sqrt{2}-4=2\sqrt{2}-2\ \text{cm}.$$

Бидејќи PQ е средна линија на триаголникот ANM, следува дека

$$\overline{PQ}=\tfrac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1\,\text{cm}.$$

3. Нека $a=\underbrace{444...444}_{11}$. Докажи дека бројот a^2-a-2 е делив со 270.

Решение. Со елементарни трансформации добиваме

$$a^2-a-2=a^2-2a+a-2=a(a-2)+a-2=(a-2)(a+1).$$

Според тоа,

$$a^2-a-2=(\underbrace{444...444}_{11}-2)(\underbrace{444...444}_{11}+1)=444...442\cdot 444...445.$$

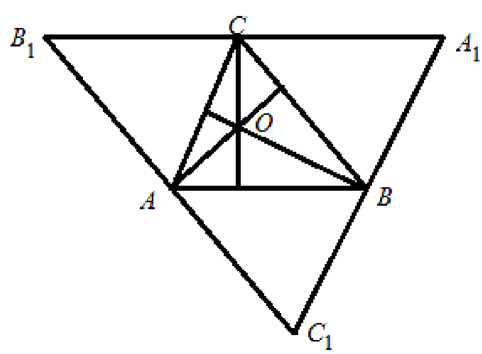
Првиот број е делив со 2 и со 3 (збирот на цифрите е 42), а вториот со 5 и со 9 (збирот на цифрите е 45). Конечно, нивниот производ е делив со $2\cdot 3\cdot 5\cdot 9=270$.

4. Нека O е ортоцентар на остроаголен триаголник ABC. Низ темињата A, B и C на триаголникот повлечени се правите p, q и r кои се паралелни со страните BC, AC и AB, соодветно. Нека A_1 е пресекот на q и r, B_1 пресекот на p и r и C_1 пресекот на p и q.

а) Докажи дека O е центар на кружницата опишана околу триаголникот $A_1B_1C_1$.

б) Ако $\overline{AB}=\overline{OC}$ определи го аголот $\measuredangle ACB$.

Решение. а) Бидејќи $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1B_1 \parallel AB$, отсечките BC, AC и AB се средни линии во триаголникот $A_1B_1C_1$. Понатаму, $AO\perp BC$ и од $B_1C_1 \parallel BC$ следува дека $AO\perp B_1C_1$. Аналогно, $BO\perp A_1C_1$ и $CO\perp A_1B_1$. Според тоа, O е центар на опишаната кружница околу триаголникот



$A_1B_1C_1$.

б) Бидејќи $\overline{CO} = \overline{AB} = \overline{B_1C} = \overline{A_1C}$, добиваме дека B_1CO и A_1CO се рамнокраки правоаголни триаголници. Од ова следува дека $\measuredangle B_1OA_1 = 90^\circ$. Но, O е центар на опишаната кружница на триаголникот $A_1B_1C_1$, па затоа $\measuredangle B_1C_1A_1 = 45^\circ$. Конечно, од $\measuredangle ACB = \measuredangle B_1C_1A_1$, следува $\measuredangle ACB = 45^\circ$.

5. Низа од позитивни рационални броеви е зададена на следниов начин:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \dots.$$

Определи го местото на кое се наоѓа бројот $\frac{2014}{2015}$.

Решение. Членовите на низата се поделени по групи на следниот начин: има еден член чиј збир на броителот и именителот е 2, има два члена на низата чиј збир на броителот и именителот е 3, има три члена на низата чиј збир на броителот и именителот е 4, итн. Има n членови чиј збир на броителот и именителот е $n+1$. Дропката $\frac{2014}{2015}$ има збир 4029. Тоа значи дека пред неа има

$$\begin{aligned} 1+2+3+...+4027 &= (1+4026)+(2+4025)+\ldots+(2013+2014)+4027 \\ &= 2014 \cdot 4027 \\ &= 8110378 \end{aligned}$$

членови чиј што збир на броителот и именителот е помал од 4029. Во последната група со збирот 4029 пред бараната дропка се броевите $\frac{4028}{1}, \frac{4027}{2}, \frac{4026}{3}, \frac{4025}{4}, \dots, \frac{2014}{2015}$. Според тоа, дропката $\frac{2014}{2015}$ се наоѓа на

$8110378 + 2014 + 1 = 8112393$ место.

IX одделение

1. Дали е можно рабовите на коцка да се означат (нумерираат) со броевите 1,2,3,...,11,12, така што збирот на броевите придружени на сите три раба кои излегуваат од исто теме на коцката за сите темиња на коцката да е еднаков? Одговорот да се образложи.

Решение. Нека работ AB е нумериран со некој број. Тогаш тој број ќе се појави во збирот и кај темето A и кај темето B. На ист начин секој од броевите од 1 до 12 се појавува по два пати. Значи, ако ги собереме сите 8 збирови кај сите темиња на коцката, ќе се добие бројот 2(1+2+3+...+12)=156. Ако сите 8 збира кои се придружени на осумте темиња на коцката се еднакви природни броеви, тогаш секој од нив е $\frac{156}{8}=\frac{39}{2}$ што не е можно, од каде следува дека предложеното означување не е можно.

2. За разнесување на поштата поштарот користи велосипед. Од поштата до местото *A* има 48 *km*. Првите 10 *km* од патот се рамни, следните 10 km е угорница, па 6 km е повторно рамно и остатокот од патот е удолница која е наклонета под ист агол како угорницата. На рамниот дел од патот поштарот се движи со 8 *km* на час, а на угорницата со 3 *km* на час. Со која брзина вози поштарот по удолницата, ако за враќање од местото А кон поштата му треба $\frac{14}{5}$ часа повеќе време, отколку за одење од поштата до местото *A*.

Решение. Нека x е брзината со која поштарот вози по удолница. Удолницата од поштата до местото *A* е $48-(10+10+6)=22km$. Патот од поштата до местото *A* поштарот го поминал за $\frac{10}{8}+\frac{10}{3}+\frac{6}{8}+\frac{22}{x}$ часа. Истиот пат од местото А до поштата го поминал за $\frac{22}{3}+\frac{6}{8}+\frac{10}{x}+\frac{10}{8}$ часа.
Затоа важи равенката

$$\frac{10}{8}+\frac{10}{3}+\frac{6}{8}+\frac{22}{x}+\frac{14}{5}=\frac{22}{3}+\frac{6}{8}+\frac{10}{x}+\frac{10}{8}$$

чие решение е $x=10$. Оттука, брзината на поштарот по удолница е 10 *km* на час.

3. Збирот на два природни броја е 2015. Ако на едниот од нив му ја изоставиме последната цифра се добива другиот број. Одреди ги сите такви парови броеви.

Решение. Нека X и Y се дадените броеви и нека $Y<X$. Тогаш $X=10Y+k$, каде k е изоставената цифра. Од условот на задачата имаме: $X+Y=2015$ и $X+Y=11Y+k$ и оттука $11Y+k=2015$. Значи, k е остатокот при делење на 2015со 11, т.е. $k=2$.Тогаш$11Y+2=2015$, па $Y=183$ и $X=1832$.

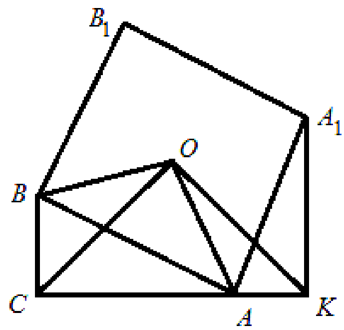
4. Над хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC со катети $\overline{AC}=b$ и $\overline{BC}=a$ е конструиран квадрат надвор од триаголникот. Колкаво е растојанието од C до центарот на квадратот?

Решение. Од темето A_1 на квадратот BAA_1B_1 спуштаме нормала кон правата AC и K е нивната пресечна точка. Тогаш $\measuredangle CAB = \measuredangle AA_1K$ (како агли со заемно нормални краци) и $\overline{AB} = \overline{AA_1}$. Според тоа, триаголниците ABC и AKA_1 се складни. Оттука $\overline{AK} = a$. Јасно, $\overline{BO} = \overline{AO}$. Да забележиме дека

$$\measuredangle CBO = \measuredangle CBA + 45^\circ = \measuredangle KAA_1 + 45^\circ = \measuredangle KAO.$$

Според тоа, триаголниците CBO и KAO се складни. Уште повеќе

$$\begin{aligned} 90^\circ &= \measuredangle BOA = \measuredangle BOC + \measuredangle COA \\ &= \measuredangle AOK + \measuredangle COA \\ &= \measuredangle COK \end{aligned}$$



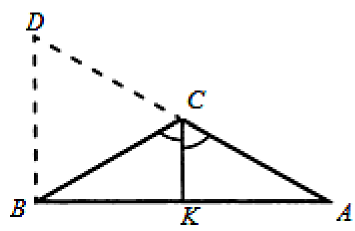
Значи, триаголникот CKO е рамнокрак правоаголен со краци $\overline{CO} = \overline{KO}$ и прав агол во темето O. Па според Питагорова теорема добиваме $\overline{CO} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

5. Во триаголникот ABC е познато дека $\measuredangle C = 120^\circ$ и CK е симетрала на тој агол. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{CK}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BC}}.$$

Решение. Низ B да повлечеме права паралелна на CK и нека D е пресек на таа нормала со AC. Тогаш

$\measuredangle DCB = 60^\circ$ и $\measuredangle DBC = \measuredangle KCA = 60^\circ$,



што значи дека $\triangle DCB$ е рамностран. Понатаму, заради сличноста на триаголниците ABD и AKC важи

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}, \text{ т.е. } \frac{\overline{BD}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AC}+\overline{CD}}{\overline{AC}} = 1 + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}.$$

Делејќи го равенството

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{KC}} = 1 + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

со $\overline{BD}$ добиваме дека

$$\frac{1}{\overline{KC}}=\frac{1}{\overline{BD}}+\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}},$$

и заради тоа што $\overline{BD}=\overline{CD}$ го добиваме бараното равенство.