Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска 1959

Kvadar u neodređenoj analizi

STJEPAN ŠKARICA, Zagreb

1. Ako su a, b i c mjerni brojevi kvadra, a d njegove dijagonale, onda je $a^2+b^2+c^2=d^2$. Tražiti, da a, b, c i d budu prirodni brojevi, znači tražiti rješenja neodređene jednadžbe $x^2+y^2+z^2=t^2$. Rješenje te jednadžbe je *osnovno*, ako su x, y, z, t relativno prosti brojevi, t. j. ako im je najveća zajednička mjera $=1$. Iz svakog osnovnog rješenja (x_1, y_1, z_1, t_1) dobijemo beskonačno mnogo neosnovnih (kx_1, ky_1, kz_1, kt_1) za $k=1, 2, 3, \ldots$

Iz jednadžbi: $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$ nalazimo odmah jedno osnovno rješenje gornje jednadžbe $3^2+4^2+12^2=13^2$; isto tako iz jednadžbi $8^2+15^2=17^2$ i $9^2+12^2=15^2$ dobivamo rješenje $(8, 9, 12, 17)$, a iz $9^2+12^2=15^2$ i $15^2+20^2=25^2$ rješenje $(9, 12, 20, 25)$.

Ako je dakle $r(k^2 - l^2) = s(m^2 + n^2)$, onda iz identiteta: $r^2(k^2 - l^2)^2 + r^2(2kl)^2 = r^2(k^2 + l^2)^2$ i $s^2(m^2 - n^2)^2 + s^2(2mn)^2 = s^2(m^2 + n^2)^2$ izlazi jednakost $s^2(m^2 - n^2)^2 + s^2(2mn)^2 + r^2(2kl)^2 = r^2(k^2 + l^2)^2$. U posljednjem je primjeru $r = 5$, $k = 2$, $l = 1$, $s = 3$, $m = 2$, $n = 1$.

Kako na pr. iz $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$ izlazi: $13^2 - 12^2 = 3^2 + 4^2$, $13^2 - 4^2 = 3^2 + 12^2$, $13^2 - 3^2 = 4^2 + 12^2$, za $r = s = 1$ iz gornje jednakosti dobivamo tri nova rješenja: (7, 24, 312, 313), (135, 72, 104, 185), (64, 48, 39, 89). Iz svakog dakle rješenja (a, b, c, d) neodr. jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ dobivamo s pomoću gornje jednakosti, uzevši $r = s = 1$, tri nova (osn.) rješenja.

2. Broj $(2k + 1)^2 + (2l)^2$ je neparan i oblika $4m + 1$ pa je jednak razlici kvadrata $(2m + 1)^2 - (2m)^2$, gdje je $m = k^2 + l^2 + k$; odatle dobivamo identitet $(2k + 1)^2 + (2l)^2 + [2(k^2 + l^2 + k)]^2 = [2(k^2 + l^2 + k) + 1]^2$. Na pr. $k = 1$, $l = 1$, $3^2 + 2^2 + 6^2 = 7^2$; $k = 3$, $l = 2$, $7^2 + 4^2 + 32^2 = 33^2$; $k = 0$, $l = 5$, $1^2 + 10^2 + 50^2 = 51^2$.

3. Ako lijevu stranu identiteta $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$ pomnožimo s $4m^2n^2$, a desnu sa $(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2$, dobivamo identitet, što ga je dao Japanac *Matsunago*, $(m^4 - n^4)^2 + (4m^2n^2)^2 + [2(m^2 - n^2)mn]^2 = (m^2 + n^2)^4$. Na pr. $m = 2$, $n = 1$, $15^2 + 16^2 + 12^2 = 5^4$.

4. *a)* Ako je $a^2 + b^2 = c^2$, onda je $(2a - b)^2 + [2(a + b)]^2 + (2b - a)^2 = (3c)^2$. Tako se dobiva identitet $[2(m^2 - n^2 - mn)]^2 + [2(m^2 - n^2 + 2mn)]^2 + (4mn - m^2 + n^2)^2 = [3(m^2 + n^2)]^2$. Na pr. $m = 8$, $n = 1$, $110^2 + 158^2 + 31^2 = 195^2$.

b) Uz isti uvjet $a^2 + b^2 = c^2$ je $(c - a)^2 + (c - b)^2 + (a + b - c)^2 = (2c - a - b)^2$; odatle nam identitet $(2n^2)^2 + (m - n)^4 + [2n(m - n)]^2 = (m^2 + 3n^2 - 2mn)^2$. Na pr. $m = 8$, $n = 1$; $2^2 + 7^4 + 14^2 = 51^2$.

5. Množenjem lijevih i desnih strana identiteta: $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$, $(c^2 - d^2)^2 + (2cd)^2 = (c^2 + d^2)^2$ dobivamo identitet $[(a^2 + b^2)(c^2 - d^2)]^2 + [2cd(a^2 - b^2)]^2 + (4abcd)^2 = [(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)]^2$. Na pr. $a = 2$, $b = 1$, $c = 4$, $d = 3$; $35^2 + 72^2 + 96^2 = 125^2$.

Stavimo li $a = p$, $b = d = 1$, $c = q$, posljednji identitet prelazi u *Euler*-ov $[(p^2 + 1)(q^2 - 1)]^2 + [2q(p^2 - 1)]^2 + (4pq)^2 = [(p^2 + 1)(q^2 + 1)]^2$.

6. Ako obje strane poznatog identiteta $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = (\alpha\gamma \pm \beta\delta)^2 + (\alpha\delta \mp \beta\gamma)^2$ pomnožimo s 4, izlazi identitet $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2 + [2(\alpha\gamma \pm \beta\delta)]^2 + [2(\alpha\delta \mp \beta\gamma)]^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2$. Na pr. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 2, 3, 5)$; $29^2 + 26^2 + 2^2 = 29^2 + 14^2 + 22^2 = 39^2$. Ako permutiramo brojeve 1, 2, 3, 5, dobivamo još četiri različite četvorke (19, 34, 2, 39), (19, 26, 22, 39), (13, 34, 14, 39), (1, 2, 2, 3). To je stoga, što od $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ permutacije elemenata $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ po 8 njih daju iste brojeve.

7. Dokazat ćemo, da identitet u točki 6. daje sva rješenja neodređene jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Ako je četvorka (x, y, z, t) osnovna, onda x, y i z ne mogu biti sva tri parni brojevi. Uzmimo, da je samo jedan od njih, na pr. x, paran! Kako su onda y i z neparni, t mora biti paran broj, ali u tom slučaju ne može postojati jednadžba $y^2 + z^2 = t^2 - x^2$, jer bi onda u jednadžbi $\frac{1}{2}(y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(t^2 - x^2)$ lijeva strana bila neparan, a desna paran broj. Broj t ne može dakle biti paran, i stoga je od brojeva x, y i z jedan, na pr. x, neparan, a y i z su parni; y i z ne mogu biti neparni, jer i u ovom slučaju jednadžba $y^2 + z^2 = t^2 - x^2$ ne može postojati s razloga, što joj je desna strana djeljiva s 4, a lijeva nije. U jednadžbi $y^2 + z^2 = (t + x)(t - x)$, gdje su t i x neparni, a y i z parni brojevi, oba su faktora na desnoj strani parni brojevi, a mora biti: $t + x = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, $t - x = 2(\gamma^2 + \delta^2)$, jer je poznato, da suma kvadrata dvaju prirodnih brojeva sadržava samo faktore oblika $r^2 + s^2$, koji se, ako su parni, mogu napisati u obliku $2(u^2 + v^2)$. Iz posljednjih dviju jednadžbi izlazi $t = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, $x = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2$, $y^2 + z^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = [2(\alpha\gamma \pm \beta\delta)]^2 + [2(\alpha\delta \mp \beta\gamma)]^2$.

Brojeve α, β, γ i δ možemo po volji odabrati; stoga neodređena jednadžba $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ ima ∞^4 rješenja. Želimo li dobiti osnovno rješenje, brojevi α, β, γ i δ moraju biti rel. prosti, i to jedan neparan, a tri parni brojevi, ili obrnuto; taj je uvjet potreban, ali nije dovoljan; na pr. za $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$, $\delta = 2$ izlazi neosnovno rješenje $13^2 + 26^2 + 26^2 = 39^2$.

8. Svi drugi identiteti, koji nijesu istovetni s identitetom u t. 6., samo su njegovi specijalni slučajevi i ne daju sva rješenja neodređene jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Primjeri. *a)* Identitet u t. 2. dobije se iz identiteta u t. 6., ako se uzme: $\alpha = k + 1$, $\beta = l$, $\gamma = k$, $\delta = l$. Ne može dati sva rješenja, jer se samo dva od brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mogu slobodno izabrati zbog $\gamma = \alpha - 1$, $\delta = \beta$.

b) Da se dobije identitet *Matsunaga* (t. 3).), valja staviti $\alpha = m^2$, $\beta = mn$, $\gamma = mn$, $\delta = n^2$, a predznake u parnim članovima uzeti redom $-\ +$. Ne daje sva rješenja zbog $\beta = \gamma = \sqrt{\alpha\delta}$.

c) Identitet u t. 4. a) dobije se, ako se stavi $\alpha = m + n$, $\beta = n$, $\gamma = m - n$, $\delta = m$, a predznaci u parnim članovima redom $-\ +$, dok se identitet u t. 4. b) dobije za $\alpha = m - n$, $\beta = \gamma = n$, $\delta = 0$. Ni jedan od njih ne daje sva rješenja.

d) Identitet u t. 5. izlazi za $\alpha = ac$, $\beta = bc$, $\gamma = ad$, $\delta = bd$ i za red predznaka u parnim članovima $-$, $+$. Zbog $\alpha\delta = \beta\gamma$ po volji se mogu izabrati tri od brojeva $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, a u *Euler*-ovom identitetu, gdje je $\alpha = pq$, $\beta = q$, $\gamma = p$, $\delta = 1$ samo dva.

e) Identitet *Desboves*-a $4(p^2 + q^2 - s^2)^2 + 4[(p-1)^2 - q^2 + p(q-s)]^2 + [(q-s)^2 - p^2 + 4q(p-s)]^2 = \{3[(p-s)^2 + q^2] + 2s(p-q)\}^2$ dobije se iz identiteta u t. 6. za $\alpha = p$, $\beta = q - p + s$, $\gamma = q + p - s$, $\delta = q - s$ uz red predznaka u parnim članovima $+$, $-$. Ne daje sva rješenja, jer se od brojeva α, β, γ i δ mogu po volji uzeti tri zbog $\delta = \gamma - \alpha$.

f) *Catalan*-ov identitet $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac)^2 = [(a+c)(a+b)]^2 + [(b+c)(a+b)]^2 + (c^2 + ac + bc - ab)^2$ izlazi za $\alpha = a + b + c$, $\beta = a$, $\gamma = b$, $\delta = c$ uz red predznaka u parnim članovima $+$, $-$, kad se tako dobiveni identitet razdijeli sa 4. Ne daje sva rješenja zbog $\alpha = \beta + \gamma + \delta$.

9. Pustimo iz vida geometrijsko značenje brojeva a, b, c i d, koji zadovoljavaju neodređenu jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$! Time otpada zahtjev, da ti brojevi budu prirodni, t. j. oni sada mogu biti cijeli pozitivni i negativni brojevi pa i nule.

Ako je $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, onda je i $(\pm a)^2 + (\pm b)^2 + (\pm c)^2 = (\pm d)^2$, pa vidimo, da je svakim rješenjem spomenute jednadžbe određeno 16 različitih njezinih rješenja, ali istovetnih po apsolutnoj vrijednosti članova.

Neka je $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$! Iz $(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = (p+d)^2$ nalazimo $p = a + b + c + d$ i prema tome $(b+c+d)^2 + (a+c+d)^2 + (a+b+d)^2 = (a+b+c+2d)^2$. Iz rješenja (a, b, c, d) dobivamo dakle rješenje $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, koje je s prvim vezano relacijama A i B:

$$A\begin{cases} \alpha = b + c + d \\ \beta = a + c + d \\ \gamma = a + b + d \\ \delta = a + b + c + 2d \end{cases} \qquad B\begin{cases} a = \beta + \gamma - \delta \\ b = \alpha + \gamma - \delta \\ c = \alpha + \beta - \delta \\ d = 2\delta - (\alpha + \beta + \gamma) \end{cases}$$

S pomoću jednadžbi A iz 16 četvorki $(\pm a, \pm b, \pm c, \pm d)$ dobit ćemo 8 rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, koja se razlikuju po aps. vrijednosti članova, jer su u dva po dva rješenja članovi protivni brojevi; na pr. iz četvorke (a, b, c, d) dobije se četvorka $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, a iz četvorke $(-a, -b, -c, -d)$ četvorka $(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta)$. Na pr. iz $(\pm 5, \pm 2, \pm 14, \pm 15)$ dobijemo iz A ovih 8 rješenja, uzetih pozitivno: $(31, 34, 22, 51)$, $(3, 6, 22, 23)$, $(1, 4, 8, 9)$, $(27, 24, 8, 37)$, $(27, 34, 18, 47)$, $(1, 6, 18, 19)$, $(3, 4, 12, 13)$, $(31, 24, 12, 41)$.

Ako je $a + b$ ili $a + c$ ili $b + c$ jednako d, po jedan član u dvije od onih 8 četvorki će biti $= 0$; na pr. iz četvorki $(1, 4, 8, -9)$ i $(-1, 4, -8, 9)$ dobiju se četvorke $(3, 0, -4, -5)$ i $(5, 0, 12, 13)$ a to su vrlo davno poznate trojke Pitagorinih brojeva.

Ako je $a + d = b + c$, ili $b + d = a + c$, ili $c + d = a + b$, među onih 8 četvorki bit će jedna opet (a, b, c, d), ako se ne obaziremo na predznake; na pr. iz $(2, -3, -6, 7)$ dobiva se četvorka $(-2, 3, 6, 7)$.

10. Dokazat ćemo, da se iz trivijalnog rješenja $(1, 0, 0, 1)$ jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ mogu s pomoću jednadžbi A dobiti sva njezina rješenja.

Neka je $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ jedno takvo rješenje, i neka su α, β, γ i δ svi pozitivni! Iz jednadžbi B dobit ćemo novo rješenje (a, b, c, d), u kojemu je $0 < d < \delta$. Zbog $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ je $\delta < \alpha + \beta + \gamma$, a iz $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 > 0$ izlazi $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) > 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$ ili $3\delta^2 > (\alpha + \beta + \gamma)^2$, i stoga je pogotovo $2\delta > \alpha + \beta + \gamma$, ili $d = 2\delta - (\alpha + \beta + \gamma) > 0$, $\delta - d = \alpha + \beta + \gamma - \delta > 0$, t. j. $0 < d < \delta$. Ako sad u novoj četvorki (a, b, c, d) eventualne negativne članove zamijenimo pozitivnim pa je onda označimo s $(\alpha_1, \beta_1,$

$\gamma_1, \delta_1)$ s pomoću jednadžbi B dobit ćemo iz nje novu (a_1, b_1, c_1, d_1), gdje je opet $0 < d_1 < \delta_1$. **Nastavimo li taj postupak, posljednja će četvorka nužno biti** $(1, 0, 0, 1)$. Obrnemo li sad taj **postupak**, iz četvorke $(1, 0, 0, 1)$ dobit će se s pomoću jednadžbi A četvorka $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Na pr. $\alpha = 35$, $\beta = 4$, $\gamma = 28$, $\delta = 45$; iz te četvorke s pomoću B dobivamo četvorku $(-13, 18, -6, 23)$; iz $(13, 18, 6, 23)$ četvorku $(1, -4, 8, 9)$; iz $(1, 4, 8, 9)$ izlazi $(3, 0, -4, 5)$, iz $(3, 0, 4, 5)$ dobije se $(-1, 2, -2, 3)$, a iz $(1, 2, 2, 3)$ napokon $(1, 0, 0, 1)$.

Obrnuto: S pomoću jednadžbi A iz $(1, 0, 0, 1)$ dobivamo $(1, 2, 2, 3)$; iz $(-1, 2, -2, 3)$ izlazi $(3, 0, 4, 5)$; iz $(3, 0, -4, 5)$ dobije se $(1, 4, 8, 9)$; iz $(1, -4, 8, 9)$ izađe $(13, 18, 6, 23)$, a iz $(-13, 18, -6, 23)$ napokon $(35, 4, 28, 45)$.