XXVI олимпијада

1. Дадена е кружница со центар на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$. Преостанатите три страни ја допираат кружница. Докажи дека

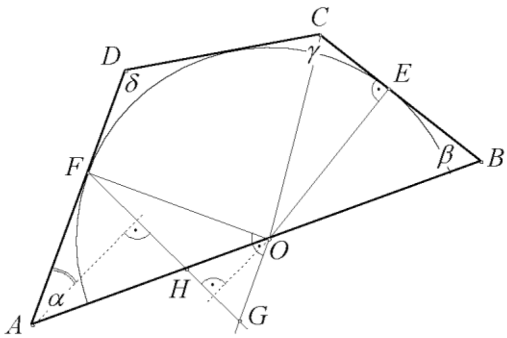
$$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}.$$

Решение. *Прв начин.* За четириаголник важи

$$\alpha+\gamma=\pi, \quad \beta+\delta=\pi.$$

Центарот O на кружницата е пресек на симетралите на аглите γ и δ. Нека FHG е нормала на симетралите на аглите $\measuredangle FAH=\measuredangle GOH=\alpha$. Значи,

$$\overline{AH}=\overline{AF} \text{ и } \overline{HO}=\overline{GO} \qquad (1)$$



Од $\measuredangle OFG=\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}=\measuredangle COE$ и $\overline{OE}=\overline{OF}$ следува $\triangle FGO\cong\triangle OCE$, т.е.

$$\overline{GO}=\overline{CE} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\overline{AO}=\overline{AH}+\overline{HO}=\overline{AF}+\overline{CE} \qquad (3)$$

Аналогно добиваме

$$\overline{BO}=\overline{BE}+\overline{DF}. \qquad (4)$$

Од (3) и (4) добиваме

$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BC}.$$

Втор начин. Нека O е центар на кружницата, r е нејзин радиус, а E и F се точки во кои таа ги допира страните BC и AD. Тогаш

$$\overline{BE}=r\operatorname{ctg}\beta, \quad \overline{EC}=r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}, \quad \overline{DF}=r\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2},$$

$$\overline{FA}=r\operatorname{ctg}\alpha, \quad \overline{OB}=\frac{r}{\sin\beta}, \quad \overline{OA}=\frac{r}{\sin\alpha}.$$

Равенството $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}$ е еквивалентно со секое од равенставата

$$r(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2})+r(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})=\frac{r}{\sin\alpha}+\frac{r}{\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}, \text{ т.е. } \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

при што последното равенство непосредно следува од равенствата $\alpha+\gamma=\pi$, $\beta+\delta=\pi$.

2. Нека $n,k\in\mathbb{N}$, $\text{NZD}(n,k)=1$, $1\le k\le n-1$ и $M=\{1,2,3,...,n-1\}$. Секој елемент од M е обоен со една од две бои, бела или сина така што:

(i) за секој i од M, броевите i и $n-i$ имаат иста боја;

(ii) за секој $i\in M, i\ne k$, броевите i и $|i-k|$ имаат иста боја.

Докажи дека сите елементи од M се обоени во иста боја.

Решение. Сите природни броеви ќе ги обоиме така што за броевите $i \in \{1,...,n-1\}$, броевите од облик $i+qn$ имаат иста боја. Нека сите броеви од облик qn се обоени како и k. Ако докажеме дека сите броеви $k, 2k, 3k$, ..., pk,... се исто обоени, тогаш сме докажале дека и сите броеви $i \in \{1,..., n-1\}$ се исто обоени. Имено, бидејќи k и n се заемно прости, за секој број i постои $p \in \{1,2,...,n-1\}$ таков што $pk \equiv i \,(\bmod n)$, т.е. $pk = qn+i$. Значи, броевите i и pk се исто обоени, па според тоа и сите броеви од множеството M се исто обоени.

Ќе го докажеме претходното тврдење. Постојат две можности:

1° $pk < qn < (p+1)k$,

2° $qn < pk < (p+1)k$.

Ознаката "$i \leftrightarrow j$" означува дека „броевите i и j имаат иста боја“. Во првиот случај

$$(p+1)k = qn+i \leftrightarrow i \text{ (по деф.) } \leftrightarrow k-i \text{ (заради } ii)) \leftrightarrow n-k+i \text{ (заради } i))$$
$$\leftrightarrow qn-k+i = pk \text{ (по деф.).}$$

Во вториот случај

$$(p+1)k = qn+j \leftrightarrow j \text{ (по деф)} \leftrightarrow k-i \text{ (заради } ii))$$
$$\leftrightarrow qn-k+i = pk \text{ (по деф.).}$$

3. За полиномот $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0,1,2,...,n$ со $w(P)$ го означуваме бројот на непарните коефициенти a_j. Нека за секој ненегативен цел број i е $Q_i = (1+x)^i$. Докажи дека ако $i_1, i_2, ..., i_n \in \mathbb{N}_0$ се такви што $0 \le i_1 < i_2 < ... < i_n$, тогаш

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + ... + Q_{i_n}) \ge w(Q_{i_1}).$$

Решение. За $m = 2^s$ добиваме

$$(1+x)^m = 1 + R(x) + x^m$$

каде R е полином со парни коефициенти. Ако степенот на полиномот P е помал од $m = 2^s$, тогаш

$$w(P \cdot Q_m) = 2w(P). \tag{1}$$

Доказот се добива со индукција по i_n. За $i_n = 0$ или 1 тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за секој

$$i_n < 2^s \ (s \ge 1).$$

Нека $i_1, i_2, ..., i_n$ е низа за која

$$2^s \le i_n < 2^{s+1}.$$

Разгледуваме два случаи:

1° $i_1 \ge 2^s = k$. Тогаш од (1) и индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned} w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\ldots+Q_{i_n}) &= w(Q_k P) = 2w(P) \\ &= 2w(Q_{i_1-k}+\ldots+Q_{i_n-k}) \\ &\ge 2w(Q_{i_1-k}) = w(Q_{i_1-k}\cdot Q_k) \\ &= w(Q_{i_1}). \end{aligned}$$

2°. $i_1 < 2^s = k$. Тогаш ($i_n < 2^{s+1} = 2k$)

$$\begin{aligned} Q_{i_1}(x)+Q_{i_2}(x)+\ldots+Q_{i_n}(x) &= (1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\ldots+(1+x)^{i_n} \\ &= a_0+a_1x+\ldots+a_{k-1}x^{k-1}+(1+x)^k(b_0+b_1x+\ldots+b_{i_n-k}x^{i_n-k}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{i_n-k} b_i x^i + x^k \sum_{i=0}^{i_n-k} b_i x^i + R(x), \end{aligned}$$

каде R е полином со парни коефициенти. Го пресметуваме бројот на непарни коефициенти на добиениот полином. Вториот и третиот собирок во последниот збир се полиноми кои немаат членови со исти степени. Ако некој од непарните коефициенти a_i биде поништен заради непарноста на соодветниот коефициент b_j , во конечниот збир би се појавил непарен коефициент b_j во собирокот $b_j x^{j+m}$. Конечно, од индуктивната претпоставка следува

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\ldots+Q_{i_n}) \ge w(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i) \ge w(Q_{i_1})$$

со што доказот е завршен.

4. Дадено е множество M од 1985 различни природни броеви, такви што ниту еден од нив нема прост делител поголем од 26. Докажи дека од множеството M може да се изберат четири меѓусебно различни броеви чиј производ е четврти степен на природен број.

Решение. Секој број $x_j \in M$ е од облик

$$x_j = \prod_{i=1}^{9} p_i^{a_{ij}} \;,\; j = 1,2,\ldots,1985,\; 0 \le a_{ij}$$

каде $p_1, p_2, \ldots, p_9$ се сите прости броеви помали од 26, т.е. $p_i \in \{2,3,5,7,11,$ $13,17,19,23\}$. Производот $x_j x_k$ е точен квадрат ако и само ако

$$a_{ij} + a_{ik} \equiv 0 \,(\bmod 2)\,,\; i = 1,\ldots,9.$$

Бројот на различни производи $x_j x_k$ по модул 2 е $2^9 = 512$. Секое подмножество од M кое содржи барем 513 елементи содржи два броја чиј производ е полн квадрат. Со елиминација на таквите парови се добиваат $\frac{1985-511}{2} = 737$ парови , такви што производот на членовите на секој пар е полн квадрат. Множеството производи е $\{y_1^2, \ldots, y_{737}^2\}$. Ако направиме аналогна постапка како претходната на множеството $\{y_1^2, \ldots, y_{737}^2\}$, добиваме дека постои пар y_r, y_s таков што $y_r y_s$ е полн квадрат. Значи $y_r y_s = y^2$, за некој $y \in \mathbb{N}$. Бидејќи

$$y_r^2 = x_j x_k, \; y_s^2 = x_m x_n,$$

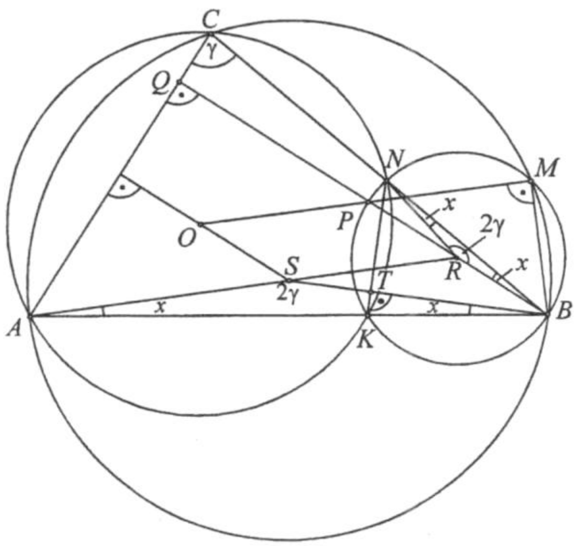
добиваме

$$x_j x_k x_m x_n = y_r^2 y_s^2 = y^4,$$

каде x_j, x_k, x_m, x_n се различни природни броеви од множеството M.

5. Дадени се $\triangle ABC$ и кружница со центар во точка O која минува низ точките A и C и по втор пат ги сече страните AB и BC во различни точки K и N, соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците ABC и KBN имаат точно две заеднички точки B и M. Докажи дека $\measuredangle BMO = 90^\circ$.

Решение. Кружницата опишана околу триаголникот ABC има центар S. $\measuredangle BCA$ е периферен агол над тетивата AB, а $\measuredangle BSA$ е централен агол над истата тетива, па според тоа $\measuredangle BSA = 2\gamma$. Четириаголникот $AKNC$ е тетивен, па затоа $\measuredangle KNC = \pi - \alpha \Rightarrow \measuredangle BNK = \alpha$ и слично $\measuredangle NKB = \gamma$.



Значи, $\triangle ABC$ е сличен со $\triangle NBK$. Ако R е центар на кружницата опишана околу триаголникот NBK, тогаш $\measuredangle NRB = 2\gamma$. Од рамнокраките триаголници ABS и BNR добиваме

$$x = \measuredangle ABS = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

па според тоа триаголниците BCQ и BTK се правоаголни. Бидејќи $OS \perp AC$, од триаголникот BCQ добиваме

$$BR \parallel OS. \tag{1}$$

Бидејќи $OR \perp NK$ (O и R се наоѓаат на симетралата на отсечката NK) и $SB \perp NK$, од триаголникот BTK, добиваме

$$SB \parallel OR. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека четириаголникот $OSBR$ е паралелограм. Нека точката P е симетрична на точката B во однос на R. Тогаш и четириаголникот $OSRP$ е паралелограм. Бидејќи S и R лежат на симетралата на отсечката BM добиваме $SR \perp BM$ и $OP \perp BM$. Сега од Талесовата теорема следува $PM \perp BM$, т.е. $OM \perp BM$, па затоа $\measuredangle BMO$ е прав.

6. За секој реален број x_1 дефинирана е низа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right), \text{ за секој } n \ge 1.$$

Докажи дека постои еден и само еден број x_1 за кој

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1, \text{ за секој } n \ge 1.$$

Решение. Дефинираме низа функции со

$$f_1(t) = t, \quad f_{n+1}(t) = f_n(t)\left(f_n(t) + \frac{1}{n}\right), \quad n \ge 1.$$

Доволно е да докажеме дека постои еден и само еден број $a > 0$ таков што

$$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

односно

$$1 - \frac{1}{n} < f_n(a) < 1, \text{ кога } n \ge 1 \tag{2}$$

Секоја од функциите f_n е полином со позитивни коефициенти, па затоа таа монотоно расте на интервалот $(0, +\infty)$.

Дефинираме низи s_n и t_n

$$f_n(s_n) = 1 - \frac{1}{n}, \quad f_n(t_n) = 1 \tag{3}$$

Јасно е дека $t_n \le 1$ и $s_n \ge 1 - \frac{1}{n}$. Ако $t_n > 1$, тогаш $f_1(n) > 1$, ... , $f_n(t_n) > 1$, што противречо на (3). Ако $s_n < 1 - \frac{1}{n}$, тогаш

$$f_1(s_n) < 1 - \frac{1}{n},\ f_2(s_n) = f_1(s_n)\left(f_1(s_n) + \frac{1}{n}\right) = \left(s_n + \frac{1}{n}\right)s_n < 1 - \frac{1}{n}, ...,\ f_n(s_n) < 1 - \frac{1}{n}.$$

Од ова и од (3) следува

$$0 < t_n - s_n < f_n(t_n) - f_n(s_n) = \tfrac{1}{n} \qquad (4)$$

Од

$$f_{n+1}(s_n) = 1 - \tfrac{1}{n} < 1 - \tfrac{1}{n+1} = f_{n+1}(s_{n+1})$$

и монотоноста на функцијата f_{n+1} добиваме

$$s_n < s_{n+1}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}$$

и аналогно

$$f_{n+1}(t_n) = 1 + \tfrac{1}{n} > 1 = f_{n+1}(t_{n+1})$$

па според тоа

$$t_{n+1} < t_n, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Значи, низата s_n е монотоно растечка и е ограничена од горе, $s_n < t_n < 1$, а низата t_n е монотоно опаѓачка низа и ограничена од долу, $t_n > 0$.

Од (4) следува $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$.

Ќе докажеме дека низата $x_n = f_n(a)$ ги има бараните својства. Имаме:

$$1 - \tfrac{1}{n} = f_n(s_n) < f_n(a) < f_n(t_n) = 1.$$

Останува да докажеме дека постои единствена низа со овие својства. За $t \neq a$ постои $s_n \in (t, a)$ или $t_n \in (a, t)$, па според тоа

$$f_n(t) < f_n(s_n) = 1 - \tfrac{1}{n} \quad \text{или} \quad f_n(t) > f_n(t_n) = 1$$

т.е. не е исполнет условот (2).