Борисав Симић (Велики Поповић)

ДОКАЗИВАЊЕ ТЕОРЕМА НА ВИШЕ НАЧИНА

Познато је да се многе геометријске теореме могу доказати на више начина. Тако се, на пример, већ зна да је за Питагорину теорему нађено да сада више од 100 различитих доказа. За утврђивање тачности једне теореме није неопходно да буде доказана на више начина, јер чим је она доказана на један начин, њена тачност је несумњива. Међутим, доказивање на више начина истинитости или неистинитости теореме је увек интересантно и има нарочиту вредност која се огледа у следећем: теорема се дуже памти и не своди се само на њезино механичко запамћивање, већ помаже и у другим приликама да се логички коректно и научно засновано изграђују и доказују тврђења која се истичу. Зато ћемо показати како се то може учинити кад су у питању следеће две теореме.

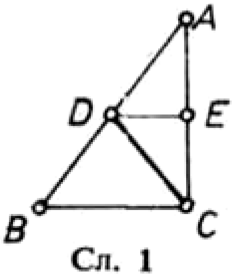
Теорема I. *Ако је троугао правоугли, тежина линија која је повучена из темена правог угла до хипотенузе једнака је половини хипотенузе.*

Претпоставка: Троугао ABC је правоугли, а CD је тежина линија која одговара хипотенузи AB.

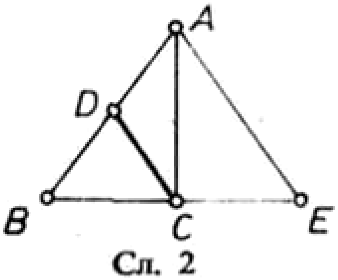
Треба доказати да је $AB=2CD$.

Доказ 1. Нека је E средина странице AC (сл. 1). Тада је DE средња линија троугла ABC, па је $DE \parallel BC$ и $DE \perp AC$. На основу тога је $\Delta ADE \cong \Delta CDE$ (пошто су катете једног од ова два троугла једнаке катетама другог) и $AD=CD$, односно $AB=2\ CD$, што је и требало доказати.

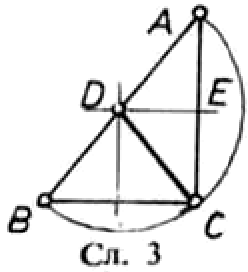
Доказ 2. Одредимо тачку E симетричну тачки B у односу на AC (сл. 2). Тада је $AB=AE$. Из чињенице да је $AE=2\,CD$ (јер



Сл. 1



Сл. 2



Сл. 3

је CD средња линија троугла ABE) следује и $AB=2\,CD$, како се то и тврдило.

Доказ 3. Код правоуглог троугла симетрале катета поклапају се са двема средњим линијама троугла, што значи да се њихов пресек — а самим тим и центар описаног круга око тог троугла — налази у средишту хипотенузе (сл. 3). Описани круг пролази кроз сва три темена троугла, те је зато $AB=BD=CD \Rightarrow AB=2CD$.

Теорема II. *Ако је једна тежина линија у троуглу половина странице на коју је повучена, онда је угао наспрам те странице прав, а троугао је правоугли.*

Доказ 1. Ако је E средина странице AC (сл. 1), онда су тачке D и E на симетрали странице AC (пошто је свака од њих једнако удаљена од A и C), па је угао DEA прав. Дуж DE је средња линија троугла ABC, услед чега је $DE \parallel BC$, па је $BC \perp AC$, тј. троугао ABC је правоугли.

Доказ 2. Продужимо BC преко C до E, тако да је $BC=CE$ (сл. 2). Спајањем A и E добијамо троугао ABE код кога је $AB=AE$. По претпоставци је $AB=2\,CD$, а CD је средња линија троугла ABE по конструкцији. Троуглови ABC и AEC су подударни (3. правило подударности). Како је угао BCA једнак углу ECA, а сем тога је са њим суплементан, то је угао BCA прав.

Доказ 3. Пошто је, по претпоставци, $AD=BD=CD$, то тачке A, B и C припадају кругу чији је центар D (сл. 3). Периферијски угао ACD је половина централног угла ADB, јер су над истим луком круга, а како је угао ADB раван, то је угао ACB прав.

Напоменимо још, на крају, да су Теорема I и Теорема II две међусобно обратне теореме. Наиме, претпоставка прве теореме је закључак друге, а закључак прве је претпоставка друге теореме.

Задаци

1. Доказати, бар на два начина, да је мања катета правоуглог троугла, чији је један угао велик 30°, половина хипотенузе; и обратно, да је у правоуглом троуглу, чија је једна катета половина хипотенузе, један оштар угао велик 30°.

2. Доказати, на два начина, да је симетрала спољашњег угла при врху једнакокраког троугла паралелна са основицом тог троугла. Да ли је истинита и тврдња да је троугао, код кога је симетрала једног спољашњег угла паралелна супротној страни тог троугла — једнакокраки троугао?

3. Доказати, на два начина, да је површина трапеза једнака производу полузбира његових паралелних страница и његове висине. У чему би се састојала теорема обратна овој, и да ли је она истинита?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија