ЈЕДНИМ ПОТЕЗОМ

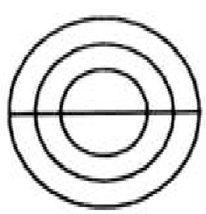
Богољуб Маринковић, Београд

Има таквих геометријских фигура које се могу нацртати једним потезом оловке, тј. тако да се врх оловке не одваја од хартије и да се дуж

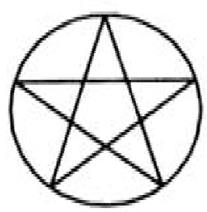
сваке саставне линије фигуре оловком пређе тачно једанпут. Али, има и фигура које је немогуће нацртати једним потезом, већ се на неком месту оловка мора подићи и повлачење наставити од неке друге тачке фигуре. А има и таквих фигура код којих се то прекидање мора извршити више пута да би се цела фигура нацртала.

Нацртајте, на пример, кружницу и повуците један пречник. Добијену фигуру лако можете нацртати једним потезом оловке, а да се она не подиже од хартије и да се ниједна линија фугура не вуче двапут. Ако, пак, нацртате квадрат са дијагоналама, па покушате да тако добијену фигуру нацртате на исти начин као претходну, уверићете се да то не можете постићи.

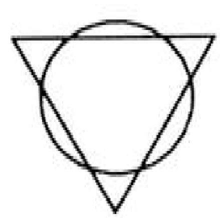
Од фигура на сл. 1 једним потезом могу се нацртати фигуре 1, 2, 3, 4 и 8, а немогуће је тако нацртати фигуре 5, 6 и 7.



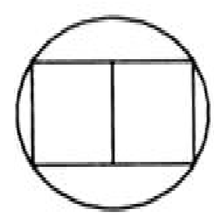
1



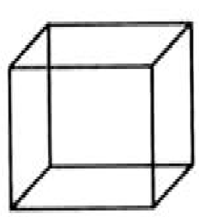
2



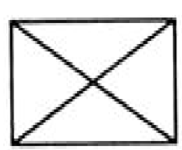
3



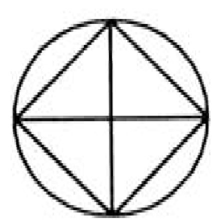
4



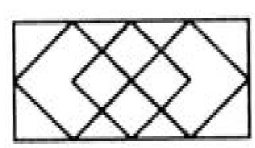
5



6



7



8

Знате ли објаснити зашто се неке фигуре на тој слици могу нацртати на наведени начин, а неке не могу?

Покушаћемо да вам то објаснимо.

Свака од нацртаних фигура састављена је од извесног броја тачака и линија (правих или кривих) које се у тим тачкама састају. Назовимо те тачке *чворовима.* Зависно од тога да ли из чвора полази (или се у њему састаје) паран или непаран број линија, чвор ћемо звати *парним* или *непарним.* Да би сте утврдили да ли се фигура може на описани начин нацртати једним потезом, потребно је установити да ли фигура има непарних чворова и ако их има, колико. Може се показати да је код сваке фигуре број непарних чворова паран, тј. да их има 0, 2, 4, 6 итд.

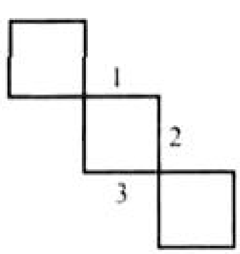
Сваки паран чвор је *пролазан.* То значи, ако се у тај чвор уђе, увек постоји слободна линија за излаз. Другачије је са непарним чвором. Због непарног броја линија које воде из таквог чвора, да би прошли свим тим линијама морамо цртање или почети или завршити у том чвору. Тако долазимо до следећег правила:

Фигура се може нацртати једним потезом оловке, а да се она не одваја од хартије и да се ниједна линија не вуче двапут – ако фигура или нема непарних чворова или их има тачно два. Ако фигура има више од два непарна чвора, такву фигуру није могуће нацртати једним потезом на описани начин.

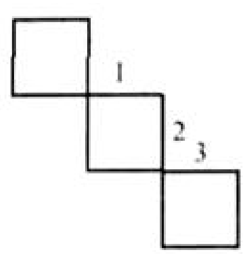
Разуме се, у читавој причи подразумева се да се фигура састоји из једног дела или како се то још каже – да је *повезана.* Наведено правило први је открио велики швајцарски математичар Леонард Ојлер (види напомену).

Сада је јасно зашто се фигуре 1, 2, 3, 4 и 8 могу нацртати једним потезом. Фигуре 2, 3 и 8 немају непарних чворова, сви су парни, док фигуре 1 и 4 имају по 2 непарна чвора. С друге стране, фигура 5 има 8 непарних чворова, а фигуре 6 и 7 по 4 непарна чвора. Стога не треба ни да покушавате да их нацртате једним потезом.

Ојлерово правило утврђује само да ли се дата фигура може или не може нацртати једним потезом. Међутим, не каже како то извести уколико је могуће. Ако линије повлачите насумице једну за другом може вам се десити да се "заглавите" упркос томе што фигура нема непарних чворова.



Сл. 2.



Сл. 3.

На пример, фигура на сл. 2 нема непарних чворова. Али ако повучете линију 1, потом 2, па 3, више нећете моћи да прођете страницама доњег квадрата.

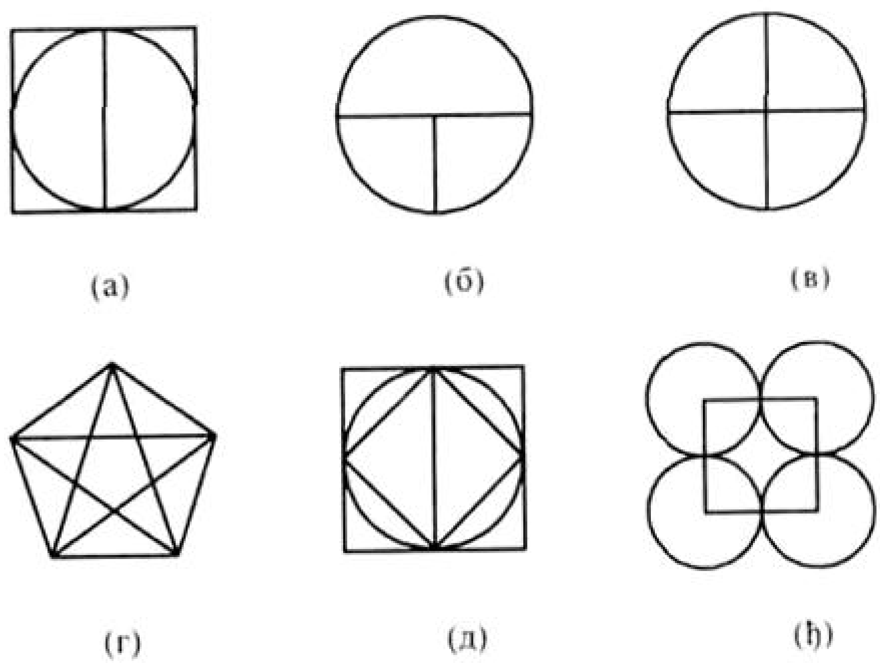
Постоји више начина да се такви "ћорсокаци" избегну. Један од таквих алгоритама (поступака) је следећи:

1. *Ако фигура нема непарних чворова, цртање се почиње из произвољног чвора. Ако има тачно два непарна чвора, почиње се у једном од њих.*

2. *За излазак из чвора у који смо непосредно ушли бира се она непређена линија, таква да фигура састављена од преосталих непређених линија буде повезана.*

Сходно томе, при цртању фигуре на сл. 2 у трећем кораку треба вући линију 3 као на сл. 3 итд.

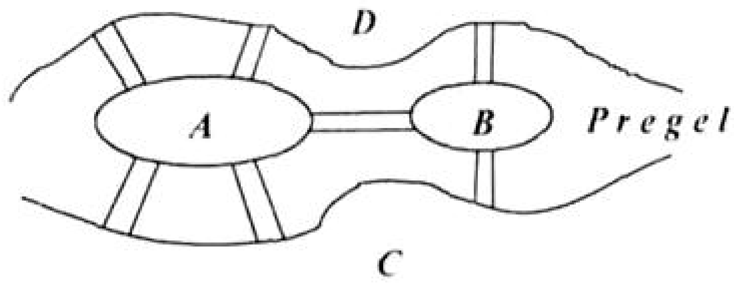
Погледајте фигуре на сл. 4 и утврдите које од њих је могуће нацртати једним потезом, а које није. За оне за које је то могуће, нацртајте одговарајућу путању.



Сл. 4.

Напомена. Наведеним и другим сличним особинама фигура бави се *теорија графова* – модерна и сасвим млада грана математике. Она проучава особине фигура (графова) које се састоје од чворова и линија које их повезују. Притом се не узимају у обзир њихове геометријске особине (облик, димензије и сл.). Битне су само везе између чворова и линија.

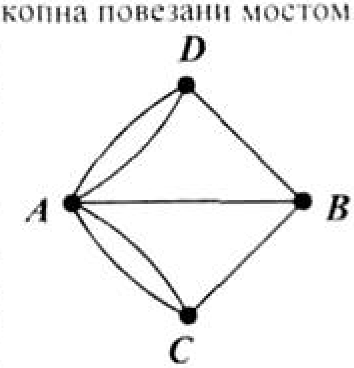
Напред наведено правило које је открио Ојлер у 18. веку сматра се првом теоремом и самим почетком теорије графова. Ојлер је заправо решио следећи проблем, познат као *проблем Кенигсбершких мостова*. Ради се о следећем.



Сл. 5.

Кроз некадашњи пруски град Кенигсберг, данас Калињинград који припада Русији, протиче река Прегел на којој су два острва. Острва су међусобно и са обалама реке повезана са 7 мостова као на сл. 5. Задатак се састојао у томе да се направи шетња којом би се преко сваког моста прешло тачно једанпут. Ојлер је показао да је то немогуће.

Обалама реке и острвима придружимо тачке A, B, C, D. Две тачке повежемо линијом ако и само су одговарајући делови копна повезани мостом. (Ако су две дела повезана са два или више мостова, тачке које им одговарају повезујемо са исто толико линија.) Као резултат добије се фигура на сл. 6 која се састоји од 4 чвора и 7 линија. Очигледно, траженој шетњи преко мостова одговара цртање добијене фигуре једним потезом и обратно. Међутим, та фигура има 4 непарна чвора, те *се стога не може нацртати једним потезом*. Према томе, не постоји тражена шетња преко Кенигсбершких мостова.



Сл. 6.

У част Ојлера фигуре (графови) које се могу нацртати једним потезу зову се *Ојлерови графови*.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија