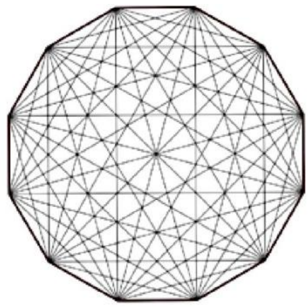
Ристо Малчески, Скопје

ПРАВИЛЕН ДВАНАЕСЕТАГОЛНИК

За многуаголникот кај кој сите страни и сите агли се еднакви велиме дека е правилен. Понатаму, знаеме дека бројот на дијагоналите кај $n-$ аголник е еднаков на $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, а внатрешниот агол кај правилен $n-$ аголник е $\alpha_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Исто така, знаеме дека околу правилен n аголник може да се опише кружница и во него може да се впише кружница.



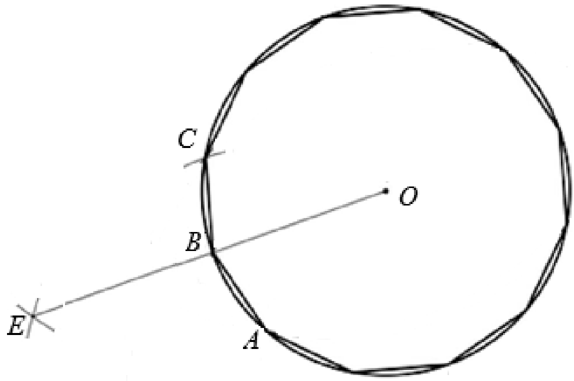
Во оваа статија предмет на наш интерес ќе биде правилниот дванаесетаголник. Од претходно изнесеното следува дека правилниот дванаесетаголник има $D_{12} = 54$ дијагонали (цртеж десно), а неговиот внатрешен агол е еднаков на $\alpha_{12} = 150^\circ$.

1. Конструкција на правилен дванаесетаголник

Во овој дел ќе разгледаме како се конструира правилен дванаесетаголник ако е познат радиусот на опишаната кружница, односно страната на дванаесетаголникот.

Задача 1. Во кружница $k(O,r)$ впиши правилен дванаесетаголник.

Решение. За да во кружницата $k(O,r)$ впишеме правилен дванаесетаголник треба дадената кружница да ја поделиме на 12 еднакви лаци.

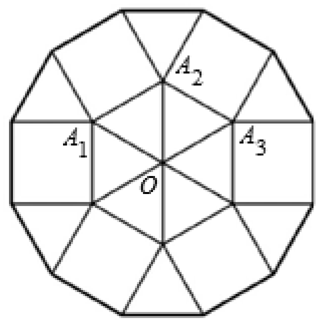


На кружницата $k(O,r)$ означуваме точка A и конструирамне кружен лак со центар во A и радиус r, кој кружницата ја сече во точката C (види цртеж). Јасно, $\measuredangle AOC = 60^\circ$, па за да го добиеме темето B на дванаесетаголникот кое е меѓу A и C треба $\measuredangle AOC$ да го поделиме на два еднакви дела. Конструираме $k'(A,r)$ и $k''(C,r)$ и во нивниот пресек ја наоѓаме точката E. Јасно, $OE \cap k = B$.

Сега, конструкцијата на другите темиња на дванаесетаголникот е очигледна. ■

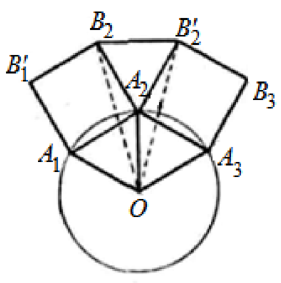
Пред да покажеме како се конструира правилен дванаесетаголник со страна a ќе ја решиме следнава задача.

Задача 2. Ако над секоја страна на правилен шестаголник надвор од шестаголникот се конструира по еден квадрат и ако ги поврземе слободните темиња на вака добиените складни квадрати, тогаш ќе се добие правилен дванаесетаголник.



Решение. Јасно, при реализација на наведената конструкција се добива дванаесетаголник (цртеж десно). За да докажеме дека овој дванаесетаголник е правилен треба да докажеме дека сите негови страни се еднакви меѓу себе и сите негови внатрешни агли се еднакви меѓу себе.

Со a да ја означиме должината на страната на правилниот шестаголник и нека O е неговиот центар. Да ги разгледаме рамностраните триаголници OA_1A_2 и OA_2A_3 (цртеж лево). Конструираниот дванаесетаголник има шест страни



еднакви на a (тоа се слободните страни на квадратите конструирани над страните на дадениот шестаголник). Понатаму, $\triangle A_2B_2'B_2$ е рамнокрак и важи

$$\measuredangle B_2A_2B_2' = 360^\circ - 2\cdot(60^\circ + 90^\circ) = 60^\circ,$$

што значи дека $\triangle A_2B_2'B_2$ е рамностран. Оттука следува дека

$$B_2'B_2 = a \text{ и } \measuredangle B_2B_2'B_3 = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

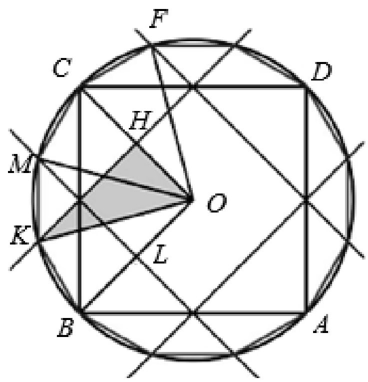
што значи дека сите страни на дванаесетаголникот се еднакви меѓу себе и сите негови внатрешни агли се еднакви меѓу себе, што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Конструирај правилен дванаесетаголник со страна a.

Решение. Од решението на задача 2 следува дека за да конструираме правилен дванаесетаголник со страна a доволно е прво да конструираме правилен шестаголник со страна a, а потоа над секоја негова страна од надворешната страна да конструираме по еден квадрат и потоа да ги поврземе слободните темиња на соседните квадрати. Добиениот дванаесетаголник е правилен и должината на неговата страна е a. ■

Во задача 1 покажавме како се конструира правилен дванаесетаголник за кој е даден радиусот на опишаната кружница r. Во врска со ова ќе решиме уште една задача, од која следува уште една конструкција на дванаесетаголникот кога е даден радиусот на опишаната кружница r.

Задача 4. Околу квадрат е опишана кружница со радиус r. Низ средините на секои две соседни страни на квадратот е повлечена права. Докажи дека осумте пресечни точки на овие прави и темињата на квадратот се темиња на правилен дванаесетаголник.



Решение. Триаголникот OKH е правоаголен (цртеж десно). За катетата OH на овој триаголник важи $OH = \frac{OC}{2} = \frac{OK}{2}$, т.е. $\triangle OKH$ е половина од рамностран триаголник. Сега, $\measuredangle BOK = \measuredangle OKH = 30^\circ$, како агли со паралелни краци. Значи,

$$\measuredangle BOK = \measuredangle KOM = \measuredangle MOC = 30^\circ,$$

од каде следува дека тврдењето на задачата. ■

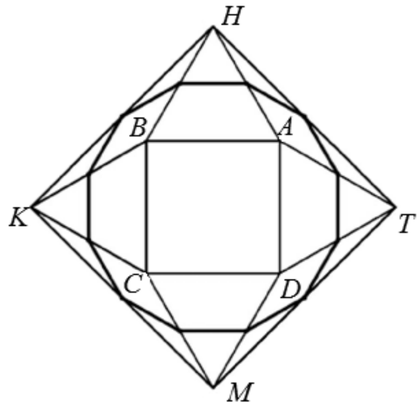
Во задача 3 покажавме како се конструира правилен дванаесетаголник за кој е дадена страната a. Во врска со ова ќе решиме уште една задача, од која следува уште една конструкција на дванаесетаголникот кога е дадена страната a.

Задача 5. Нека $ABCD$ е квадрат и нека ABH, BCK, CDM и DAT се рамнострани триаголници конструирани надвор од квадратот $ABCD$. Докажи дека средините на отсечките

$$AH, BH, HK, BK, CK, KM, CM, DM, MT, DT, AT, TH$$

се темиња на правилен дванаесетаголник.

Решение. Нека должината на страната на квадратот е $2a$. Имаме $AB = BH = BK$, па затоа средните линии во триаголниците ABH и KBH соодветни на овие страни се еднакви на половина од должината на страната квадратот, т.е. на a. Според тоа, страните на добиениот дванаесетаголник имаат еднакви должини.



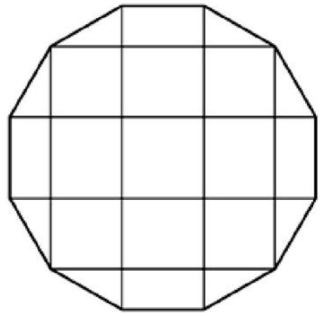
Во дадената конструкција имаме четири складни ромбови и четири складни рамнокраки трапези. Лесно се добива дека аглите на трапезите се еднакви на 60° и 120°, а аглите на ромбовите се еднакви на 150° и 30°. Според тоа, четири агли на дванаесетаголникот се еднакви на 150°, а другите четири се еднакви на $120^\circ + 30^\circ = 150^\circ$, т.е. сите агли се еднакви меѓу себе. ■

2. Плоштина на правилен дванаесетаголник

Задача 6. Определи ја плоштината P на правилен дванаесетаголник со должина на страна a.

Решение. *Прв начин.* Според задача 2 плоштината на правилниот дванаесеаголник со должина на страна a е еднаква на збирот на плоштините на шест квадрати и дванаесет рамнострани триаголници, сите со должина на страна a. Според тоа,

$$P = 6a^2 + 12 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3(2+\sqrt{3})a^2.$$

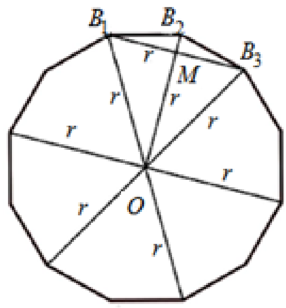


Втор начин. Со повлекување на четирите дијагонали кои се паралелни на две спротивни страни на дванаесетаголникот и четирите дијагонали кои се нормални на нив (цртеж десно), правилниот дванаесетаголник го делиме на: 1 квадрат со страна a, 4 правоаголници со страни a и $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, 4 квадрати со страна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, 4 правоаголници со страни a и $\frac{a}{2}$, 8 правоаголни триаголници со страни $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{a}{2}$. Според тоа,

$$P = a^2 + 4a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} + 4(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + 4a\cdot\frac{a}{2} + 8\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2} = 3(2+\sqrt{3})a^2 . \blacksquare$$

Задача 7. Определи ја плоштината P на правилен дванаесетаголник впишан во кружница со радиус r .

Решение. *Прв начин*. Правилниот дванаесетаголник е составен од 12 рамнокраки триаголници со врв O и агол при врвот еднаков на 30°. Според тоа, плоштината на правилниот дванаесетаголник е $P = 12P'$, каде P' е плоштината на еден од споменатите триаголници, на пример на $\triangle OB_1B_2$:



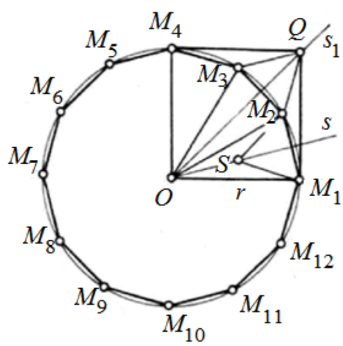
$$P' = \frac{r\cdot B_1M}{2} .$$

Но, B_1B_3 е страна на правилниот шестаголник впишан во кружница со радиус r, што значи $B_1B_3 = r$, од каде добиваме $B_1M = \frac{1}{2}B_1B_3 = \frac{1}{2}r$. Според тоа, $P' = \frac{r^2}{4}$, па затоа $P = 12P' = 12\cdot\frac{r^2}{4} = 3r^2$.

Втор начин. Правилниот дванаесетаголник може да се подели на шест складни делтоиди кај кои и двете дијагонали се еднакви на r (цртеж десно). Плоштината на еден делтоид е еднаква на полупроизводот на дијагоналите $\frac{r^2}{2}$. Затоа плоштината на правилниот дванаесетаголник е

$$P = 6\cdot\frac{r^2}{2} = 3r^2 .$$

Трет начин. Нека $M_1M_2...M_{12}$ е правилен дванаесетаголник, O е центар на опишаната околу него кружница, $r = OM_1$ е радиусот на кружницата и OM_1QM_4 е квадратот конструиран над радиусот OM_1 (цртеж десно).



Нека S е точка на симетралата на $\measuredangle M_1OM_2$ таква што $OS = M_1M_2$. Тогаш

$\measuredangle M_1OS = \measuredangle QM_1M_2$ (агли со нормални краци: $M_1M_2 \perp OS$ и $OM_1 \perp QM_1$). Но, уште важи $OM_1 = QM_1$, па затоа

$$_{\triangle}M_1OS \cong _{\triangle}QM_1M_2. \qquad (1)$$

Понатаму, заради симетрија во однос на правата s имаме $_{\triangle}OSM_2 \cong$ $_{\triangle}OSM_1$, па затоа

$$_{\triangle}M_2OS \cong _{\triangle}QM_1M_2. \qquad (2)$$

Во однос на правата s_1, т.е. во однос на дијагоналата OQ на квадратот OM_1QM_4 триаголниците M_3QM_4 и M_2QM_1 се симетрични, па затоа

$$_{\triangle}M_3QM_4 \cong _{\triangle}M_2QM_1. \qquad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува дека триаголниците M_1OS, QM_1M_2 и QM_4M_3 се складни, па затоа имаат еднакви плоштини. Плоштината на секој од нив да ја означиме со P'.

Од $M_1M_2 = M_2M_3$, $M_1S = M_2Q$ и $SM_2 = QM_3$ следува дека триаголниците M_1SM_2 и M_3QM_2 се складни, па нивните плоштини се еднакви. Нека плоштинатsа на секој од нив е еднаква на P''.

Плоштината на $_{\triangle}OM_1M_2$ да ја означиме со P'''. Јасно, $P''' = 2P' + P''$. Сега за плоштината P на правилниот дванаесетаголник добиваме:

$$P = 12P''' = 3 \cdot (3P''' + P''') = 3 \cdot (3P''' + 2P' + P'') = 3P_{OM_1QM_2} = 3r^2. \ \blacksquare$$

Задача 8. а) Дадена е страната a на правилниот дванаесетаголник. Изрази го радиусот r на опишаната кружница преку страната a.

б) Даден е радиусот r на опишаната кружница околу правилниот дванаесетаголник. Изрази ја страната на дванаесетаголникот a преку радиусот r.

Решение. а) Од формулите за плоштината на дванаесетаголникот имаме:

$$3(2+\sqrt{3})a^2 = P = 3r^2,$$

од каде добиваме

$$r = a\sqrt{2+\sqrt{3}}. \qquad (4)$$

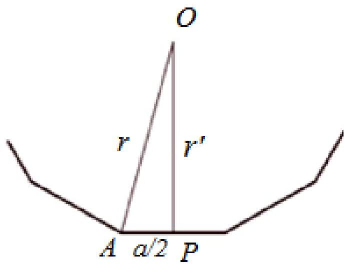
б) Од (4) следува

$$a = \frac{r}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}. \ \blacksquare \qquad (5)$$

Задача 9. а) Даден е радиусот r на опишната кружница околу правилниот дванаесетаголник. Изрази го радиусот r' на впишаната кружница во дванаесетаголникот преку радиусот r.

б) Даден е радиусот r' на впишаната кружница во правилниот дванаесетаголник. Изрази го радиусот r на опишаната кружница преку радиусот r'.

Решение. а) Од Питагоровата теорема применета на $\triangle AOP$ и од формулата (5) следува



$$r'=\sqrt{r^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{r^2-(\frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})^2},$$

т.е.

$$r'=\tfrac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}. \qquad (6)$$

б) Од формулата (6) следува $r=\frac{2r'}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, односно

$$r=2r'\sqrt{2-\sqrt{3}}. \ \blacksquare \qquad (7)$$

Задача 10. Докажи дека плоштината на кружниот прстен кој го формираат опишаната и впишаната кружница на правилен дванаесетаголник со страна a е еднаква на плоштината на круг со дијаметар a.

Решение. Нека r и r' се радиусите на опишаната и впишана кружница околу правилниот дванаесетаголник. Според задачите 8 и 9 плоштината на кружниот прстен кој го формираат овие две кружници е

$$\begin{aligned}P&=\pi r^2-\pi r'^2\\&=\pi r^2-\pi(\tfrac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}})^2\\&=\pi r^2(1-\tfrac{2+\sqrt{3}}{4})=\pi r^2\,\tfrac{2-\sqrt{3}}{4}\\&=\pi(\tfrac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})^2=\pi(\tfrac{a}{2})^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. $\blacksquare$

Задача 11. Конструирај правилен дванаесетаголник чија плоштина е два пати поголема од плоштината на даден правилен дванаесетаголник со страна a.

Решение. *Анализа.* Нека должината на страната на бараниот правилен дванаесетаголник е еднаква на b. Од задача 6 за плоштините на дадениот и бараниот правилен дванаесетаголник соодветно добиваме

$$P=3(2+\sqrt{3})a^2 \text{ и } P'=3(2+\sqrt{3})b^2.$$

Според условот на задаачата треба да важи $P'=2P$, од каде добиваме

$$3(2+\sqrt{3})b^2=6(2+\sqrt{3})a^2,$$

т.е. $b=a\sqrt{2}$.

Понатаму, ако r и r' се соодветно радиусите на опишаните кружници околу дадениот и бараниот правилен дванаесетаголник, тогаш

$$a=r\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ и } b=r'\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

и ако замениме во $b=a\sqrt{2}$, добиваме

$$r'\sqrt{2-\sqrt{3}}=r\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

т.е. $r'=r\sqrt{2}$.

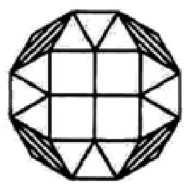
Конструкција.

1) Го конструираме поравилниот дванаесетаголник со должина на страна a.
2) Околу многуаголникот со страна a опишуваме кружница $k(O,r)$.
3) Го определуваме радиусот $r'=r\sqrt{2}$ (хипотенуза на рамнокрак правоаголен триаголник со страна r) и конструираме кружница $k'(O,r')$.
4) Во $k'(O,r')$ впишуваме правилен дванаесетаголник (наједноставно е темињата да ги определиме како пресеци на k' со полуправите чија почетна точка е O и кои минуваат низ темињата на дадениот многуаголник).

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

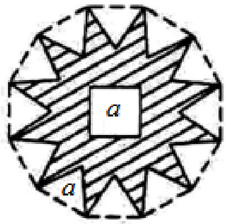
Дискусија. Задачата има единствено решение до складност. ■

Задача 12. На цртежот десно е даден правилен дванаесетаголник со страна a. Определи ја плоштината на штрафираниот дел од дванаесетаголникот.



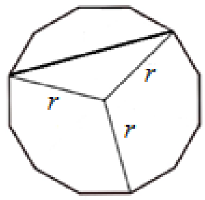
Решение. На дадениот цртеж имаме 4 квадрати, 12 рамнострани триаголници и 4 ромба (штрафираните делови), сите со страна a. Според задача 2 плоштината на правилен дванаесетаголник е еднаква на збирот на плоштините на 6 квадрати и 12 рамнострани триаголници, сите со страна a. Според тоа, штрафираните 4 ромба замениле 2 квадрати со страна a, па затоа плоштината на штрафираниот дел е еднаква на $2a^2$. ■

Задача 13. На цртежот десно е даден „правилна“ дванаесеткрака ѕвезда со страна a. Определи ја нејзината плоштина.



Решение. Со 12 рамностани триаголници со страна a и 1 квадрат со страна a дадената ѕвезда, т.е. штрафираниот дел од фигурата може да се дополни до правилен дванаесетаголник со страна a. Оттука следува дека плоштината на ѕвездата е еднаква на плоштината на 5 квадрати со страна a, односно на $5a^2$. ■

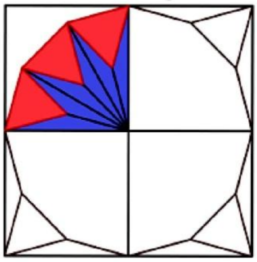
Задача 14. Докажи дека плоштината на правилниот дванаесетаголник е еднаква на плоштината на оној квадрат чија страна е еднаква на страната на рамностраниот триаголник впишан во дадениот дванаесетаголник (темињата на триаголникот се совпаѓаат со три темиња на дванаесетаголникот).

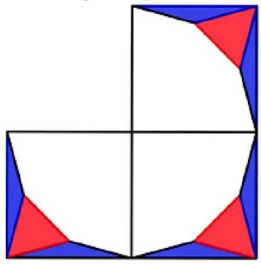


Решение. Рамностраниот триаголник впишан во правилниот дванаесетаголник со радиус на опишаната кружница r се добива ако три темиња на дванаесетаголникот избереме така што аглите кои ги формираат радиусите со крајни точки во овие темиња формираат агли од 120° (цртеж десно). Понатаму, страната на впишаниот рамностран триаголник е двапати поголема од висината на рамностраниот триаголник со страна r, што значи дека таа е еднаква на $2\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}=r\sqrt{3}$. Конечно, плоштината на квадратот чија страна е еднаква на страната на рамностраниот триаголник впишан во дадениот дванаесетаголник е еднаква на $(r\sqrt{3})^2=3r^2$, а според задача 7 тоа е плоштината на правилниот дванаесетаголник. ■

3. Расекување на правилен дванаесетаголник

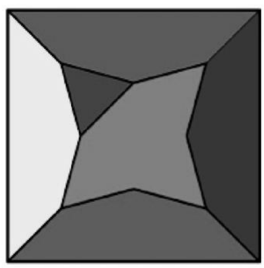
Од третиот начин на решавање на задача 7 следува дека правилен дванаесетаголник може да се расече на 12 делови така што од добиените делови може да се состават три складни квадрати. Расекувањето на дванаесетаголникот и составувањето на квадратите е прикажано на долниот лев и десен цртеж.



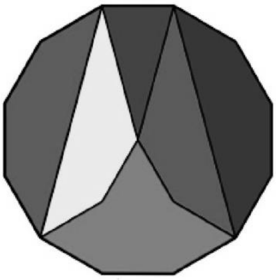
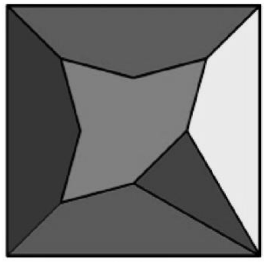


Логично е да се запрашаме дали правилниот шестаголник може да се расече на неколку делови така што од нив може да се состави квадрат. Одговорот на ова прашање е позитивен. Во продолжение ќе покажеме како правилниот дванаесетаголник може да се расече на шест делови од кои може да се состави квадрат.

Плоштината на квадратот кој треба да го составиме мора да е еднаква на плоштината на правилниот дванаесетаголник. Според задача 7 ако r е радиусот на опишаната кружница околу дванаесетаголникот, тогаш неговата плоштина е $P=3r^2$, што значи дека должината на страната на квадратот треба да биде $r\sqrt{3}$. Сега, од решението на задача 14 следува дека страната на квадратот е еднаква на дијагоналите со кои во правилниот дванаесетаголник е впишан рамностран триаголник. Да земеме една од овие три дијагонали. Аглите меѓу неа и двете на неа соседни страни се 45° и 105°. Затоа логично е расекувањата да се прават долж вакви дијагонали. Така, ако дванаесетаголникот го расечеме долж две вакви дијагонали и симетричните слики на надворешните делови во однос на овие дијагонали (цртеж долу лево) ќе добиеме расекување на дванаесетаголникот на 6 делови. Начинот на кој од овие делови може да се состави квадрат е прикажан на цртежот десно долу.



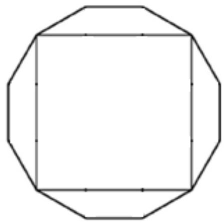
Покрај добиеното расекување, на цртежот долу лево е прикажани уште едно расекување долж истите дијагонали кое е различно од претходното.

4. Уште неколку задачи за правилниот дванаесетаголник

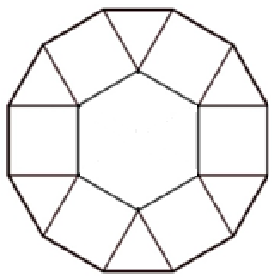
Задача 15. Докажи дека меѓу било кои седум темиња на правилниот дванаесетаголник постојат три кои се темиња на рамнокрак правоаголен триаголник.

Решение. Четири темиња на правилниот дванаесетаголник, како на цртежот десно, се темиња на квадрат. Според тоа, темињата на правилниот дванаесетаголник можеме да ги поделиме во три групи од по четири темиња на квадрат. Имаме 7 произволни темиња на дванаесетаголникот и како $7=3\cdot 2+1$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постојат три темиња кои се темиња на некој од трите квадрати. Јасно, овие три темиња се темиња на рамнокрак правоаголен триаголник. ■



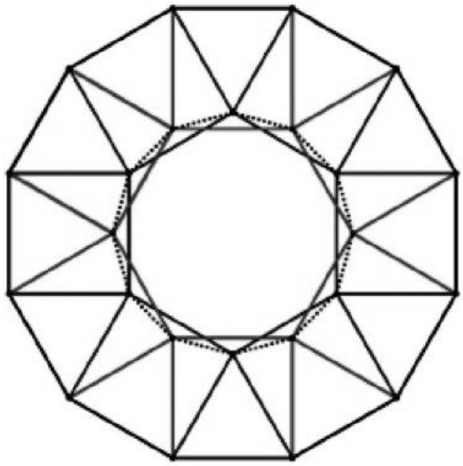
Задача 16. Дали во рамнината постои множество M од 24 точки такви што за секоја точка A од тоа множество важи: во множеството M постојат точно четири точки кои се на растојание 1 од точката A?

Решение. Земаме правилен дванаесетаголник со должина на страна 1. Тогаш за секое негово теме постојат точно две точки кои се на растојание 1 од него (цртеж десно). Над секоја страна на дванаесетаголникот кон внатрешноста на дванаесетаголникот конструираме рамностран триаголник, со што добиваме множество M од 24 точки. Според решението на задача 2 при некое нумерирање на внатрешните темињата со броевите од 1 до 12, шесте парни темиња на рамностраните триаголници се темиња на правилен шестаголник (цртеж десно). Притоа за секое теме на дванаесетаголникот добиваме уште по една точка која е на растојание 1. Јасно, за секоја од шесте внатрешни точки



имаме точно по 4 точки кои се на растојание 1.

Аналогно важи и за непарните темиња, со што за секое теме на дванаесетаголникот имаме точно по 4 точки кои се на растојание 1 од и за секое од добиените 12 внатрешни темиња на триаголниците имаме точно по 4 точки кои се на растојание 1 од другите точки на множеството M. Имено, лесно се гледа дека секое од шесте темиња на едниот внатрешен шестаголник е на растојание различно од 1 од секое теме на другиот внатрешен шестаголник.

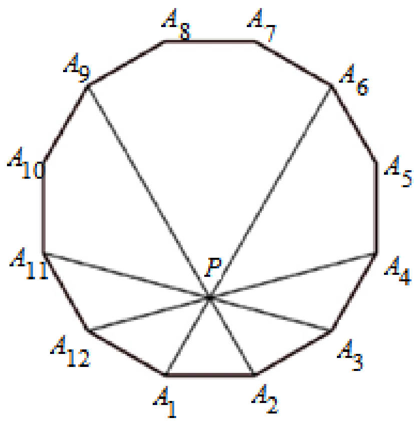


Според тоа, одговорот на прашањето е позитивен и бараните 24 точки се прикаќжани на цртежот десно, при што секои две точки кои се на растојание 1 се поврзани со полна линија. ■

Задача 17. Докажи дека постојат четири дијагонали на правилниот дванаесетаголник кои не се дијаметри на опишаната кружница и кои минуваат низ една иста точка.

Решение. *Прв начин*. Нека дијагоналите A_1A_6 и A_2A_9 на правилниот дванаесетаголник $A_1A_2...A_{12}$ се сечат во точката P (цртеж десно). Имаме:

$$\measuredangle A_2A_1A_6 = \measuredangle A_2A_1A_3 + \measuredangle A_3A_1A_4 + \\ + \measuredangle A_4A_1A_5 + \measuredangle A_5A_1A_6 \\ = 60^\circ$$



и аналогно $\measuredangle A_1A_2A_9 = 60^\circ$. Според тоа, триаголникот A_1A_2P е рамностран. Понатаму,

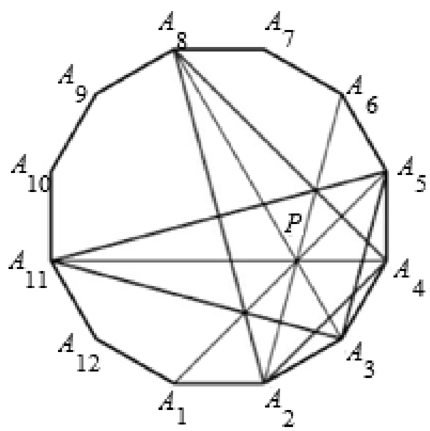
$$\measuredangle A_{12}A_1P = \measuredangle A_{12}A_1A_{11} + \measuredangle A_{12}A_1A_{11} + \measuredangle A_{11}A_1A_{10} + ... + \measuredangle A_7A_1A_6 = 90^\circ,$$

и како $A_{12}A_1 = A_1A_2 = A_1P$ заклучуваме дека $A_{12}A_1P$ е рамнокрак правоаголен триаголник. Според тоа, $\measuredangle A_1A_{12}P = 45^\circ$. Понатаму,

$$\measuredangle A_1A_{12}A_4 = \measuredangle A_1A_{12}A_2 + \measuredangle A_2A_{12}A_3 + \measuredangle A_3A_{12}A_4 = 45^\circ,$$

и како $\measuredangle A_1A_{12}P = 45^\circ$ добиваме дека точките A_{12}, P и A_4 се колинеарни. Аналогно се докажува дека и точките A_{11}, P и A_3 се колинеарни. Конечно, од претходните разгледувања следува дека дијагоналите A_1A_6, A_2A_9, A_3A_{11} и A_4A_{12} се сечат во една точка.

Втор начин. Да ги разгледаме триаголниците $A_2A_4A_8$ и $A_3A_5A_{11}$ (цртеж десно). Дијагоналите A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} како симетрали на аглите на триаголник $A_2A_4A_8$ се сечат во точката P.



Слично дијагоналите A_3A_8, A_5A_1 и $A_{11}A_4$ како симетралите на аглите на триаголникот $A_3A_5A_{11}$ се сечат во една точка. Но, P е заедничка точка на A_3A_8 и $A_{11}A_4$, па затоа и дијагоналата A_5A_1 минува низ P.

Од горните разгледувања следува дека дијагоналите A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11} и A_5A_1 се сечат во една точка, што и требаче да се докаже. ■

5. Задачи за самостојна работа

Задача 18. Даден е правилен дванаесетаголник. Над страните на дванаесетаголникот, кон неговата внатрешност, се конструирани 12 квадрати. Докажи дека темињата на овие квадрати кои лежат во внатрешност на дадениот дванаесетаголник се темиња на нов правилен дванаесетаголник.

Задача 19. Нека $ABCD$ е квадрат и нека ABH, BCK, CDM и DAT се рамнострани триаголници конструирани кон внатрешноста од квадратот $ABCD$. Докажи дека средините на отсечките

$$AH, BH, HK, BK, CK, KM, CM, DM, MT, DT, AT, TH$$

се темиња на правилен дванаесетаголник.

Задача 20. Дали во рамнината може да се изберат 2016 точки и некои од нив да се поврзат со отсечки така што ќе важиЧ

1) Од секоја точка излегуваат по 4 отсечки.
2) Сите отсечки се со должина 1.
3) Секои две точки се сврзани, т.е. се поврзани со искршена линија која се состои од некои од нацртаните отсечки.