

ММО 2017

1. Определи ги сите функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такви што за секој природен број $n > 1$ и за секои $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Решение. Од условот на задачата за $n=1$ добиваме

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy,$$

а за $n=2$ имаме

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2.$$

Ако ги одземеме последните две равенства добиваме дека

$$2xy = 3x^2y + 3xy^2.$$

Во последното равенство ставаме $x=y=1$ и добиваме $2=6$, што е противречност. Според тоа, не постои функција која ги задоволува условите на задачата.

2. Определи ги сите природни броеви n такви што

$$(n^3 + 39n - 2)n! + 17 \cdot 21^n + 5$$

е точен квадрат.

Решение. Нека означиме

$$a_n = (n^3 + 39n - 2)n! + 17 \cdot 21^n + 5.$$

Ако $n \geq 4$, тогаш $8 | n!$. Уште повеќе, $a_n \equiv 5^n + 5 \pmod{8}$.

Ако n е парен број, тогаш $5^n \equiv 1 \pmod{8}$, па $a_n \equiv 6 \pmod{8}$. Но, сите точни квадрати имаат остатоци 0, 1 или 4 при делење со 8. Значи, ако $n \geq 4$ и n е парен, тогаш a_n не е точен квадрат.

Нека $n \geq 7$. Јасно $7 | n!$. Тогаш $a_n \equiv 5 \pmod{7}$. Од друга страна остатоците на точните квадрати при делење со 7 се 0, 1, 2 или 4. Значи, a_n не е точен квадрат за $n \geq 7$. Па, од претходната дискусија останува да провериме за $n=1$, $n=2$, $n=3$ и $n=5$.

Ако $n=5$, $a_5 \equiv 2 \cdot 1^5 + 5 \equiv 2 \pmod{5}$.

Бидејќи остатоците на точен квадрат при делење со 5 се 0, 1 или 4, a_5 не е точен квадрат.

За $n=3$, имаме $a_3 \equiv 3 \pmod{7}$, па a_3 не е точен квадрат.

За $n=2$, имаме $a_2 \equiv 1 + 5 \equiv 2 \pmod{4}$, па a_2 не е точен квадрат.

За $n=1$, $a_1 = (1 + 39 - 2) \cdot 1 + 17 \cdot 21 + 5 = 400$.

Значи, само за $n=1$, a_n е точен квадрат.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz = 1$. Докажи дека

$$(x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) \geq (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1) .$$

Решение. Користејќи го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(y^2)^2 + (\frac{x}{z})^2} \geq x^2 y^2 + \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = x^2(y^2 + \frac{1}{xy})$$

$$\sqrt{(y^2)^2 + (\frac{x}{z})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\frac{y}{x})^2} \geq y^2 z^2 + \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{x} = y^2(z^2 + \frac{1}{yz})$$

$$\sqrt{(x^2)^2 + (\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2 + (\frac{y}{x})^2} \geq x^2 z^2 + \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = z^2(x^2 + \frac{1}{xz}).$$

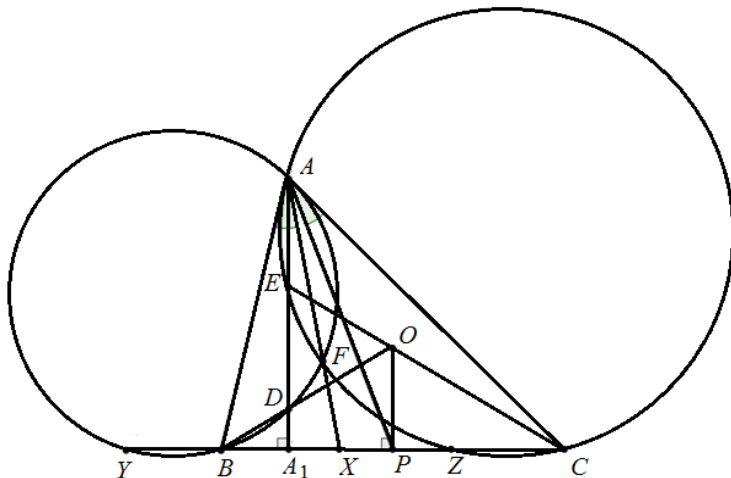
Множејќи ги последните три неравенства добиваме,

$$\begin{aligned} (x^4 + \frac{z^2}{y^2})(y^4 + \frac{x^2}{z^2})(z^4 + \frac{y^2}{x^2}) &\geq x^2 y^2 z^2 (y^2 + \frac{1}{xy})(z^2 + \frac{1}{yz})(x^2 + \frac{1}{xz}) \\ &= (xyz)^3 (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1) \\ &= (\frac{x^2}{y} + 1)(\frac{y^2}{z} + 1)(\frac{z^2}{x} + 1), \end{aligned}$$

што требаше и да се докаже.

4. Нека O е центар на опишаната кружница околу остроаголниот триаголник ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$). Нека A_1 и P се подножјата на нормалите повлечени од A и O кон страната BC , соодветно. Правите BO и CO се сечат со правата AA_1 во точките D и E , соодветно. Втората пресечна точка на опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACE е точката F . Докажи дека симетралата на $\angle FAP$ минува низ центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC .

Решение. Доволно е да докажеме дека $\angle BAF = \angle CAP$. Бидејќи OP е нормална на BC и O е центарот на опишаната кружница, заклучуваме дека P е средина на BC . Според тоа, AP е медијана на триаголникот од темето A , па затоа доволно е да докажеме дека AF е симедијана од A .



Нека правата AF ја сече страната BC во X и нека опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACE по вторпат ја сечат правата BC во точките Y и Z , соодветно. Тогаш од степенот на точка во однос на кружница следува

$$\begin{aligned}
 \overline{XB} \cdot \overline{XY} &= \overline{XF} \cdot \overline{XA} = \overline{XZ} \cdot \overline{XC} \\
 \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} &= \frac{\overline{XZ}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{XB} + \overline{XZ}}{\overline{XC} + \overline{XY}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CY}}. \quad (1) \\
 \angle ACE &= \angle ACO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) \\
 &= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle ABC) \\
 &= 90^\circ - \angle ABC \\
 &= 90^\circ - \angle ABA_1 \\
 &= \angle BAA_1 = \angle BAE,
 \end{aligned}$$

што значи дека BA е тангента на опишаната кружница околу триаголникот ACE . Слично, CA е тангента на опишаната кружница околу триаголникот ABD . Повторно од степенот на точка во однос на кружница следува

$$\overline{BA}^2 = \overline{BZ} \cdot \overline{BC}, \quad \overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CY}$$

Ако ги поделиме ови две равенства и го искористиме равенството (1) добиваме

$$\frac{\overline{BA}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}.$$

Според тоа, $AX \equiv AF$ е симедијаната на $\triangle ABC$ повлечена од темето A .

5. Нека $n > 1$ е природен број и $a_1, a_2, \dots, a_n$ е низа од n природни броеви.

Нека

$$b_1 = \left\lfloor \frac{a_2 + \dots + a_n}{n-1} \right\rfloor, b_i = \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n}{n-1} \right\rfloor, 1 < i < n, b_n = \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \right\rfloor.$$

Дефинираме пресликување f со $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

а) Нека функцијата $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е дефинирана со $g(1)$ е бројот на различни елементи во низата $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $g(m)$ е бројот на различни елементи во низата

$$f^m(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(f^{m-1}(a_1, a_2, \dots, a_n)), m > 1.$$

Докажи, дека постои природен број k_0 таков што за $m \geq k_0$ функцијата $g(m)$ е периодична.

б) Докажи дека $\sum_{m=1}^k \frac{g(m)}{m(m+1)} < C$ за било кој природен број k , каде константата C не зависи од k .

Решение. а) Нека $n > 2$. Ќе покажеме дека за доволно големо m , $g(m) = 1$.

Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ е низа природни броеви. Тогаш

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\left\lfloor \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n-1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{a_1 + a_3 + \dots + a_n}{n-1} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \right\rfloor \right),$$

при што некои од елементите во фамилијата може да се еднакви, од каде следува $g(1) \leq n$. Аналогно добиваме $g(m) \leq n$ за секој природен број m . Нека S_r е збирот на елементите на низата $f^r(a_1, a_2, \dots, a_n)$. За збирот на елементите на низите $(b_1, \dots, b_n)$, $f(b_1, \dots, b_n)$ од n елементи важи

$$\begin{aligned} S_{r+1} &= \left\lfloor \frac{b_2 + b_3 + \dots + b_n}{n-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b_1 + b_3 + \dots + b_n}{n-1} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}{n-1} \right\rfloor \\ &\leq \frac{b_2 + b_3 + \dots + b_n}{n-1} + \frac{b_1 + b_3 + \dots + b_n}{n-1} + \dots + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}}{n-1} \\ &= b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_r \end{aligned} \quad (*)$$

за секој природен број r . Јасно, $0 \leq S_r \leq S$, за секој r природен број.

Добиваме дека постои природен број k_0 таков што за $m \geq k_0$,

$$k = S_m = S_{m+1} = \dots \geq 0. \quad (1).$$

Знак равенство во (*) важи само кога броевите во низата $f^m((b_1, b_2, \dots, b_n))$ се еднакви меѓу себе за доволно голем m .

Ќе докажеме

$$S_{r+1} = S_r \Rightarrow d_1 = d_2 = \dots = d_n,$$

каде

$$f^m(a_1, a_2, \dots, a_n) = (d_1, \dots, d_n)$$

за доволно голем m . Навистина, за да важи знак равенство потребно е $n-1 \mid S_r - b_i, 0 \leq i \leq n$. Од тука добиваме дека

$$b_1 \equiv b_2 \equiv \dots \equiv b_n \pmod{n-1} \quad \dots(2).$$

Од (2) добиваме дека $\frac{S_r - b_1}{n-1}, \frac{S_r - b_2}{n-1}, \dots, \frac{S_r - b_n}{n-1}, 1 \leq i \leq n$ се природни броеви. Исто така

$$|c_i - c_j| \equiv \left[\frac{S_r - b_i}{n-1} \right] - \left[\frac{S_r - b_j}{n-1} \right] \equiv \frac{S_r - b_i}{n-1} - \frac{S_r - b_j}{n-1} \equiv \frac{b_i - b_j}{n-1} \equiv |b_i - b_j|. \quad (3)$$

Од (1) и (2) следува (3) и дека во секој чекор се добива се помал природен број, поголем или еднаков на 0. После конечен број чекори се добива дека $d_i = d_j$. Постојат конечно многу комбинации i, j од каде следува дека постои k_0 поголем од максимумот на чекори за секој пар i, j , од каде следува тврдењето. Значи постои природен број k_0 таков што за $m \geq k_0$, елементите на низата $f^m(a_1, a_2, \dots, a_n)$ се еднакви меѓу себе од каде $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.

Нека $n=2$. Јасно е дека $(a_1, a_2) = f(a_1, a_2)$, следува $g(m) \leq 2$, за секој $m \in \mathbb{N}$.

б) За $n > 2$ и за произволен природен број k ,

$$\sum_{m=1}^k \frac{g(m)}{m(m+1)} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{k_0} \frac{g(m)}{m(m+1)} + \sum_{m=k_0+1}^{\infty} \frac{g(m)}{m(m+1)}$$

каде k_0 е природниот број од под а). Тогаш

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \frac{g(m)}{m(m+1)} &< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{k_0} \frac{g(m)}{m(m+1)} + \sum_{m=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} \\ &\leq n \sum_{m=1}^{k_0} \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{k_0+1} = C. \end{aligned}$$

За $n=2$ имаме

$$\sum_{m=1}^k \frac{g(m)}{m(m+1)} < 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 2.$$