Републички натпревар 2014

I година

1. Определи го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ чиј што збир на цифри е 17, ако сите цифри се различни и ги задоволуваат равенствата:

$$2x = y - z \quad \text{и} \quad y = t^2.$$

Решение. Бидејќи y е цифра, $y \le 9$ и $y = t^2 \Rightarrow t \le 3$. Ќе ги разгледаме сите случаи за t.

Ако $t = 0$, тогаш $t = y = 0$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.

Ако $t = 1$, тогаш $t = y = 1$ што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.

Ако $t = 2$, тогаш $y = 4,\ 2x = 4 - z$, од каде што следува дека z е парен број помал од 4. Можни се следниве случаи:

1. за $z = 0$ имаме $x = t = 2$, што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни,
2. за $z = 2$ имаме $z = t = 2$, што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни,
3. за $z = 4$имаме $x = 0$, што не е можно, бидејќи тогаш бројот не би бил четирицифрен.

Значи, t не може да биде 2.

Нека $t = 3$. Тогаш, $y = 9,\ 2x = 9 - z$, од каде што следува дека z е непарен број. Можни се следниве случаи:

1. $z = 1,\ x = 4$, па затоа $\overline{xyzt} = 4913$, чиј што збир на цифри е 17, што и се бара.
2. $z = 3,\ x = 3$, што не е можно, бидејќи според условот на задачата сите цифри треба да се различни.
3. $z = 5,\ x = 2$, па затоа $\overline{xyzt} = 2953$, но збирот на цифри е 19, па ова не е решение.
4. $z = 7,\ x = 1$, па затоа $\overline{xyzt} = 1973$, но збирот на цифри е 20, па ова не е решение.
5. $z = 9,\ x = 0$, што не е можно, бидејќи тогаш бројот не би бил четирицифрен.

Значи, единствено решение е бројот $\overline{xyzt} = 4913$.

2. Одреди ги x, y, z ако

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Решение. Дадениот израз е еквивалентен со

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}, \quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Од $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}$ се добива дека $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$, од каде следува $x=\frac{az}{c}, y=\frac{bz}{c}$.

Сега ,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{a}{\frac{az}{c}}+\frac{b}{\frac{bz}{c}}=\frac{2c}{z} \tag{1}$$

Од друга страна

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{4a^2+4b^2+4c^2}{\frac{a^2z^2}{c^2}+\frac{b^2z^2}{c^2}+z^2}=\frac{4c^2(a^2+b^2+c^2)}{z^2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{4c^2}{z^2} \tag{2}$$

Од (1) и (2) имаме дека $\frac{2c}{z}=\frac{4c^2}{z^2} \Rightarrow \frac{2c}{z}=1 \Rightarrow z=2c$. Од овде, $x=2a, y=2b.$

3. Најди ги сите природни броеви n со следново својство: за секој позитивен делител d на n, бројот $d+1$ е делител на $n+1$.

Решение. Ако n е непарен прост број или еден, делители на n се 1 и n, но тогаш $n+1$ ќе биде парен број за кој важи дека $1+1=2$ и $n+1$ се сигуно негови делители.

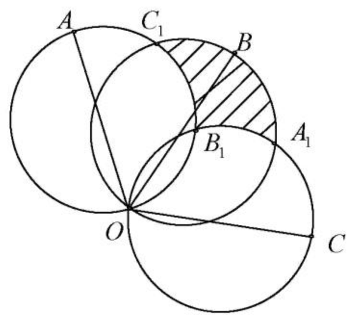
Ако n е парен број, тогаш $n+1$ ќе биде непарен број и $1+1=2$ нема да е делител на $n+1$, а еден е делител на n, па значи n не може да биде парен број.

Ако n е непарен сложен број, тогаш

$$\begin{aligned}
&n=kl\Rightarrow n+1=kl+1=(k+1)(l-s)=(l+1)(k-t) && \Rightarrow\\
&kl+1=kl+l-ks-s=kl+k-lt-t && \Rightarrow\\
&1=l-s(k+1)=k-t(l+1) && \Rightarrow\\
&l>k+1,\ k>l+1 && \Rightarrow\\
&l>k+1>l+2
\end{aligned}$$

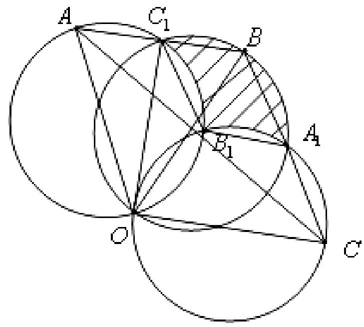
што не е можно. Според тоа бараните броеви се 1 и сите непарни прости броеви.

4. Во рамнина се дадени три еднакви по должина отсечки OA, OB и OC при што точката B лежи во внатрешноста на помалиот агол AOC. Тие се дијаметри на три кружници кои освен во точката O, се сечат и во точките A_1, B_1 и C_1. Докажи дека плоштината на криволиницкиот триаголник $A_1B_1C_1$ (шрафираниот дел на цртежот) е половина од плоштината на триаголникот ABC.



Решение. Триаголниците $\triangle OAC_1$ и $\triangle OC_1B$ се складни, бидејќи $\overline{OA}=\overline{OB}$ (услов на задачата), $\overline{OC_1}$ е заедничка страна и $\measuredangle OC_1B=\measuredangle AC_1O=90^\circ$ (Талесова теорема). Од тука следува дека $\overline{AC_1} = \overline{C_1B}$, т.е. точката C_1 е средина на страната AB.

Слично, точките B_1 и A_1 се средини на страните AC и BC, соодветно. Односно, C_1B_1 и B_1A_1 се средни линии на $\triangle ABC$, од каде што следува дека $\overline{A_1B} = \overline{B_1C_1}$. Оттука следува дека плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот B_1C_1 и отсечката B_1C_1 е еднаква со плоштината на кружниот отсечок ограничен со лакот A_1B и отсечката A_1B. Слично, важи и за плоштините на кружните отсечоци чии лаци се BC_1 и A_1B_1.



Од претходно изнесеното следува дека, плоштината на криволинискиот триаголник $A_1B_1C_1$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $A_1B_1C_1B$, која што пак е половина од плоштината на триаголникот ABC, што требаше да се докаже.

II година

1. Пресметај:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}\,.$$

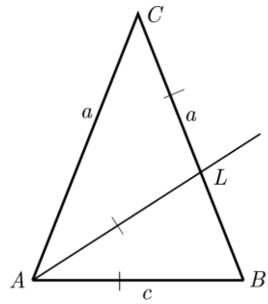
Решение. Од

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{n^4+n^3+n^2+n^3+n^2+n+n^2+n+1}{n^2(n+1)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}} = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\\ &= 1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

следува дека

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}} =\\ &= 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+1+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\\ &= 2013+1-\frac{1}{2014} = 2014-\frac{1}{2014}.\end{aligned}$$

2. Најди го односот на должината на основата и должината на кракот во рамнокрак триаголник со агол при основата од 72°.



Решение. Нека дадениот триаголник е ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$ и $\measuredangle ABC=\measuredangle BAC=72^\circ$, цртеж десно. Ќе воведеме ознаки $\overline{AC}=\overline{BC}=a$ и $\overline{AB}=c$. Нека AL $(L\in BC)$ е симетрала на аголот при темето A. Тогаш триаголниците ABC, CAL и BLA се слични (имаат исти агли), па според тоа $\overline{AL}=\overline{AB}=\overline{CL}=c$. Од сличноста на ABC и BLA добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BL}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{a-c}{c},$$

односно $c^2+ac-a^2=0$. Имаме $(\frac{c}{a})^2+\frac{c}{a}-1=0$ и затоа $\frac{c}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Значи, бараниот однос е $\frac{c}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Докажи дека ако $|z^2+1|=2|z+1|$, $z\in\mathbb{C}$, тогаш $|z|\le\sqrt{7}$.

Решение. Нека $z=x+iy$. Тогаш

$$z+1=x+1+iy \text{ и } z^2+1=x^2-y^2+1+2xyi,$$

од каде

$$|z^2+1|=2|z+1| \Leftrightarrow (x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2=4((x+1)^2+y^2) \qquad \Leftrightarrow$$
$$x^4+y^4+1-2x^2y^2+2x^2-2y^2+4x^2y^2=4x^2+8x+4+4y^2 \qquad \Leftrightarrow$$
$$x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2-8x-3-6y^2=0 \qquad \Leftrightarrow$$
$$(x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)+4x^2-8x+4-7=0 \qquad \Leftrightarrow$$
$$(x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)+4(x-1)^2-7=0.$$

Ако ставиме $r^2=x^2+y^2$ тогаш од последното равенство следува дека

$$(r^2)^2-6r^2-7\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^2-7)(r^2+1)\le 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$r^2-7\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2\le 7 \quad \Leftrightarrow \quad |r|\le\sqrt{7}$$

што требаше и да се докаже.

4. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2.$$

Решение. Имаме:

$$8\cdot(3x+1)\cdot 6\cdot(4x+1)\cdot 4\cdot(6x+1)\cdot 2\cdot(12x+1)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2,$$

односно

$$(24x+8)(24x+6)(24x+4)(24x+2)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

Нека $24x+5=y$, тогаш

$$(y+3)(y+1)(y-1)(y-3)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$$

и оттука

$$(y^2-9)(y^2-1)=2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\text{, т.е. } y^4-10y^2+9-2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2=0.$$

Во множеството реални броеви решенија на последната равенка се

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{5+\sqrt{25-9+2\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}}=\pm\sqrt{5+\sqrt{16(1+48)}}=\pm\sqrt{33},$$

па затоа $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{24}$.

III година

1. Познато е дека двата корени на равенката $x^2+bx+c=0$ лежат во интервалот $(3,4)$. Докажи дека важи неравенството $2c+7b+24<0$!

Решение. Нека x_1, x_2 се корени на равенката. Од условот на задачата, следува дека важат неравенствата $(x_1-3)(x_2-4)<0$ и $(x_1-4)(x_2-3)<0$. Со собирање на овие две неравенства и со користење на Виетовите врски за корените на квадратната равенка, се добива бараното неравенство.

2. Одреди ги сите реални решенија на равенката

$$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$$

Решение. Нека $2^x=a$ и $3^x=b$. Равенката се трансформира во

$$1+a^2+b^2-a-b-ab=0,$$

која е еквивалентна со равенката

$$(1-a)^2+(a-b)^2+(b-1)^2=0.$$

Од последната равенка следува $a=b=1$, од каде добиваме дека $x=0$.

3. Во остроаголниот триаголник ABC, должината на најголемата висина AH е еднаква на должината на тежишната линија BM. Докажи дека $\measuredangle ABC\leq 60^\circ$! Дали некогаш се достигнува знак на равенство?

Решение. Нека точката M е средина на отсечката $\overline{AC}$ и нека $\overline{CG}$ е друга висина на триаголникот ABC. Од M повлекуваме нормали кон другите две страни на триаголникот. Нека пресечните точки на нормалите со страните BC и AB се F и L, соодветно (види цртеж). Тогаш, од триаголникот MBF имаме $\overline{MF}=\overline{BM}\sin\measuredangle MBF$, односно

$$\overline{BM}=\overline{AH}=2\overline{MF}=2\overline{BM}\sin\measuredangle MBF$$

($\overline{MF}$ е средна линија за триаголникот AHC). Добиваме дека $\sin\measuredangle MBF=\frac{1}{2}$, од каде следува

$$\measuredangle MBF = 30^\circ \qquad (1)$$

Од триаголникот LBM имаме

$$\overline{BM} = \overline{AH} \geq \overline{CG} = 2\overline{ML} = 2BM \sin \measuredangle ABM ,$$

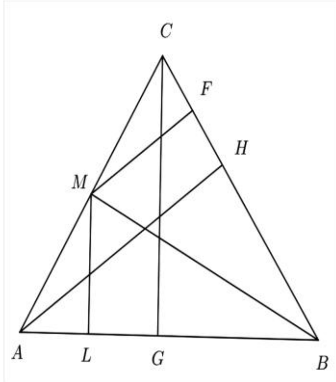
односно $\sin \measuredangle ABM \leq \frac{1}{2}$, од каде следува дека

$$\measuredangle ABM \leq 30^\circ \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABM + \measuredangle MBC \leq 60^\circ .$$

Аголот $\measuredangle ABM = 30^\circ$ ако и само ако $\overline{AH} = \overline{CG}$. Тоа е можно само кога триаголникот ABC е рамнокрак, со агол при врвот од 60° , односно кога триаголникот ABC е рамностран.



4. Нека $f\left(t\right) = \sqrt{1+t^2} - t$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x),$$

ако $x > 0, y > 0, z > 0$ и важи $xy + yz + zx = 1$.

Решение. Воведуваме тригонометриски смени

$$x = \operatorname{ctg}\alpha, y = \operatorname{ctg}\beta, \quad z = \operatorname{ctg}\gamma ,$$

каде што α, β, γ се остри агли. Од условот на задачата, следува дека важи равенството

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{ctg}\alpha = 1 ,$$

кое што е еквивалентно со равенството

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека постои триаголник со агли α, β, γ . Да забележиме, од тоа што аглите се остри, следува дека $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma \neq 0$. Од (1) ги добиваме следниве еквивалентни равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) = 0$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} + \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = 0$$

$$\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)\sin\gamma} = 0 \qquad (2)$$

Но, аглите α, β, γ се остри, па од (2) следува дека $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Со смената $x = \operatorname{ctg}\alpha$ и имајќи предвид дека $\sin\alpha > 0$, функцијата го добива видот

$$f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} .$$

Аналогно се добива $f(y)=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $f(z)=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Конечно, за вредноста на дадениот израз добиваме

$$\begin{aligned}f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x)&=\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}\\&=\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}(\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2})+\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}\\&=\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\beta+\gamma}{2}(1-\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2})+\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}\\&=\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}(1-\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2})+\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}=1.\end{aligned}$$

IV година

1. Нека a и b се реални броеви така што $a+b=2$. Докажи дека

$$\min\{|a|,|b|\}<1<\max\{|a|,|b|\}\Leftrightarrow ab\in(-3,1).$$

Решение. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b=2$. Тогаш:

$$\begin{aligned}\min\{|a|,|b|\}<1<\max\{|a|,|b|\}\quad&\Leftrightarrow\quad |a|<1<|b| \text{ или } |b|<1<|a|\\&\Leftrightarrow\quad a^2<1<b^2 \text{ или } b^2<1<a^2\\&\Leftrightarrow\quad (a^2-1)(b^2-1)<0\\&\Leftrightarrow\quad a^2b^2-(a^2+b^2)+1<0\\&\Leftrightarrow\quad (ab)^2-(4-2ab)+1<0\\&\Leftrightarrow\quad (ab+1)^2<4\\&\Leftrightarrow\quad |ab+1|<2\\&\Leftrightarrow\quad -2<ab+1<2\\&\Leftrightarrow\quad ab\in(-3,1).\end{aligned}$$

2. Нека $a_1,a_2,\dots$ е низа за која важи $a_1=2, a_2=5$ и

$$a_{n+2}=(2-n^2)a_{n+1}+(2+n^2)a_n, \text{ за секој } n\geq 1.$$

Дали постојат природни броеви p,q,r така што $a_pa_q=a_r$?

Решение. Првите членови на низата се $2,5,11,8,65,\dots$ Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n\equiv 2 \pmod 3$, за секој природен број $n\geq 1$. Јасно, $a_1\equiv a_2\equiv 2 \pmod 3$.

Нека претпоставиме дека $a_n\equiv a_{n+1}\equiv 2 \pmod 3$. Од условите на задачата добиваме

$$a_{n+2}=(2-n^2)a_{n+1}+(2+n^2)a_n\equiv 4-2n^2+4+2n^2\equiv 8\equiv 2 \pmod 3.$$

Ако постојат природни броеви p,q,r така што $a_pa_q=a_r$ тогаш важи

$$4 = 2 \cdot 2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3),$$

што не е можно. Според тоа, не постојат природни броеви p, q, r така што $a_p a_q = a_r$.

3. Нека $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти, за кои важи

$$f(0) = 23,\ f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \ldots = f(x_n) = 2014,$$

за некои различни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Најди ја максималната вредност на n.

Решение. Дефинираме $g(x) = f(x) - 2014$. Ако $f(x_i) = 2014$, тогаш x_i е нула на $g(x)$, па затоа $g(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) q(x)$ за некој полином $q(x)$ со цели коефициенти, каде n е максималниот број на x_i. Ставајќи $x = 0$ во $g(x)$ добиваме

$$g(0) = -1991 = -11 \cdot 181 = \prod_{i=1}^{n} (x_i) q(0).$$

Бидејќи 11 и 181 се прости броеви, следува дека -1991 може да се запише како производ на најмногу 4 различни множители, односно бидејќи

$$-1991 = -1 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 181,$$

добиваме дека $n \le 4$. Останува да дадеме пример кога $n = 4$. Нека

$$g(x) = (x-1)(x+1)(x+11)(x+181),\ q(x) = 1.$$

Тогаш полиномот

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x+11)(x+181) + 2014$$

ги задоволува условите на задачата.

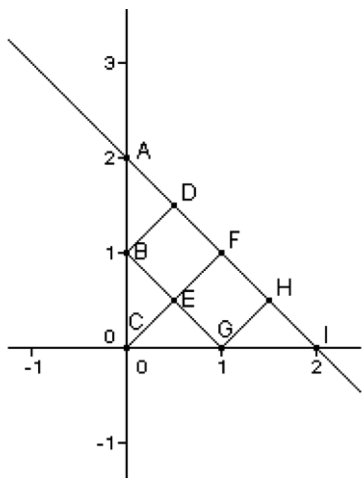
4. Нека a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$ се ненегативни реални броеви за кои важи $a_i + b_i \le 2$. Докажи дека постојат $i, j,\ i \ne j$ такви што важи

$$|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \le 1.$$

Решение. Точките (a_i, b_i) ќе ги претставиме во координатен систем. Јасно, секоја од нив припаѓа на триаголникот ACI (види цртеж) или во неговата внатрешност. Нека

$$A(0,2), B(0,1), C(0,0), D(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}), E(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}),$$

$$F(1,1), G(1,0), H(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}), I(2,0).$$



Триаголникот ACI го делиме на шест области определени со триаголниците ABD, BCE, CEG, GHI и квадратите $BDFE$ и $EFHG$. Бидејќи имаме шест области во кои се наоѓат седум точки, од принцип на Дирихле, постојат две точки (a_i, b_i) и (a_j, b_j) кои припаѓат во иста област. Бидејќи важи

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq 1$$

за било кои две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) од иста област следува дека важи и

$$|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \leq 1.$$