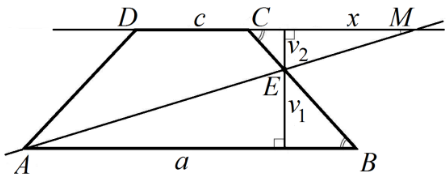
Наумка Србиноска, Охрид

ПОВЕЌЕ НАЧИНИ НА РЕШАВАЊЕ НА ЕДНА ЗАДАЧА

Наоѓањето на решението на било која задача претставува задоволство за секого од нас. Меѓутоа, наоѓањето на повеќе начини за да се реши една иста задача е посебен предизвик, бидејќи за такво нешто потребни се не само определени знаења, туку и способност проблемите да се согледуваат од повеќе аспекти. Во определени случаи наоѓањето на повеќе начини за решавање на една иста задача може и да се совлада со систематска работа. Токму затоа во продолжение ќе разгледаме две задачи на кои ќе презентираме повеќе начини за нивно решавање.

Задача 1. Во трапезот $ABCD$ должините на поголемата AB и помалата основа CD се однесуваат како $3:1$. На продолжението на CD преку темето C избрана е точка M така да правата AM го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека растојанието на точката M до темето C е половина од должината на основата AB.

Решение. *Прв начин*. Нека должината на поголемата основа е a, на помалата c, висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x, види цртеж. Од условот на задачата следува $a:c = 3:1$, т.е. $a = 3c$. Понатаму, бидејќи $P_{\triangle ABE} = P_{AECD}$, важи



$$\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+c}{2}(v_1+v_2).$$

Ако замениме $a = 3c$ добиваме

$$\frac{3cv_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3c+c}{2}(v_1+v_2),$$

Од каде после средувањето наоѓаме $v_1 : v_2 = 2:1$. Од сличноста на триаголниците ABE и MCE следува $a : x = v_1 : v_2$, па затоа $a : x = 2:1$, односно $x = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека должината на поголемата основа е a, на помалата c, висината на трапезот е $v = v_1 + v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x. Од условот на задачата следува $a:c = 3:1$, т.е. $a = 3c$. бидејќи $P_{\triangle ABE} = P_{AECD}$, важи $\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+c}{2}(v_1+v_2)$. Од последното равенство следува $2av_1 = (a+c)(v_1+v_2)$, односно $av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2$. Од сличноста на триаголниците ABE и MCE следува $a : x = v_1 : v_2$, па затоа $x = \frac{av_2}{v_1}$. Ако во равенството $av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2$ земеме дека $a = 3c$ добиваме $3cv_1 = 3cv_2 + cv_1 + cv_2$, односно $v_1 = 2v_2$. Конечно, со замена во $x = \frac{av_2}{v_1}$ добиваме дека $x = \frac{av_2}{2v_2} = \frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Трет начин. Нека должината на поголемата основа е a, на помалата c, висината на трапезот е $v=v_1+v_2$ и нека растојанието од точката M до точката C е x. Од условот на задачата следува $a:c=3:1$, т.е. $a=3c$. Бидејќи $P_{\triangle ABE}=P_{AECD}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$ добиваме $\frac{av_1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+c}{2}v$. Со замена за $a=3c$ добиваме $\frac{3cv_1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3c+c}{2}v$, односно $v_1=\frac{2}{3}v$. Според тоа, $v_2=\frac{1}{3}v$. Од $P_{AECD}=\frac{1}{2}P_{ABCD}$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3c+c}{2}v$, следува

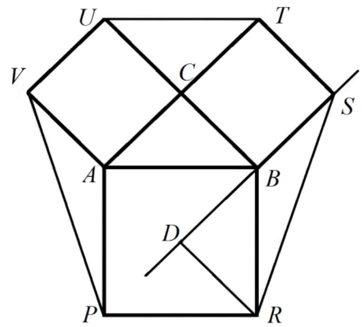
$$P_{\triangle AMD}=P_{AECD}+P_{\triangle EMC}=cv+\frac{1}{2}xv_2=cv+\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{3}v=v(c+\frac{x}{6}).$$

Од друга страна $P_{\triangle AMD}=\frac{(c+x)v}{2}$, па затоа $\frac{(c+x)v}{2}=v(c+\frac{x}{6})$, од каде наоѓаме $6c+x=3c+3x$, односно $2x=3c$. Конечно, $a=3c=2x$, т.е. $x=\frac{a}{2}$, што и требаше да се докаже.

Задача 2. Даден е рамнокрак праваголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB=90^\circ$). Над страните на триаголникот ABC, надвор од триаголникот се конструирани квадрати $APRB, BSTC$ и $ACUV$. Докажи дека

$$P_{\triangle ABC}+P_{\triangle CTU}+P_{\triangle AVP}+P_{\triangle BRS}=P_{BSTC}+P_{ACUV}.$$

Решение. *Прв начин*. Триаголникот ABC е рамнокрак и правоаголен, па затоа $a=\overline{AC}=\overline{BC}$ и $c=\overline{AB}$. Нека D е подножната точка на нормалата повлечена од точката R на правата SB. Од $BC\perp BD$ и $AB\perp BR$ следува дека острите агли $\measuredangle CBA$ и $\measuredangle DBR$ се со нормални краци, па затоа важи

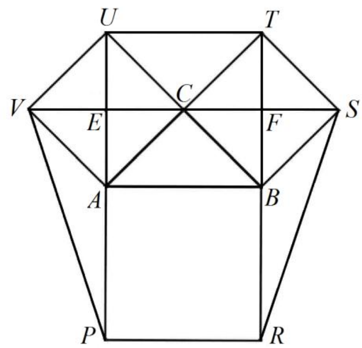


$$\measuredangle CBA=\measuredangle DBR=45^\circ.$$

Триаголникот BDR е правоаголен па затоа

$$\measuredangle BRD=90^\circ-\measuredangle DBR=90^\circ-45^\circ=45^\circ=\measuredangle BAC.$$

Понатаму, четириаголникот $APRB$ е квадрат, па затоа $\overline{BR}=\overline{AB}=c$. Освен тоа, $\measuredangle DBR=\measuredangle CBA$ и $\measuredangle BRD=\measuredangle BAC$, па од признакот за складност АСА следува дека $\triangle RBD\cong\triangle ABC$, што значи дека $\overline{DR}=\overline{CA}=a$. Отсечката DR е висина на триаголникот BRS спуштена на страната BS, па затоа $P_{\triangle BRS}=\frac{\overline{BS}\cdot\overline{DR}}{2}=\frac{a^2}{2}$. Заради симетрија имаме $P_{\triangle AVP}=\frac{a^2}{2}$. Од друга страна триаголниците ABC и CTU се правоаголни со должини на катети еднакви на a, па затоа важи $P_{\triangle ABC}=P_{\triangle CTU}=\frac{a^2}{2}$. Значи, $P_{\triangle ABC}+P_{\triangle CTU}+P_{\triangle AVP}+P_{\triangle BRS}=4\frac{a^2}{2}=2a^2$. Од друга страна $P_{BSTC}+P_{ACUV}=a^2+a^2=2a^2$, со што тврдењето е докажано.



Втор начин. Ако ги повлечеме дијагоналите на квадратите $BSTC$ и $ACUV$ (види цртеж), добиваме дека триаголниците $ABC, BTC, TBS,$ TUC, UAC и AUV се складни. Имено, овие триаголници се правоаголни и нивните катети се еднакви, па складноста следува од признакот САС. Понатаму, важи

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} = P_{\triangle TBS} + P_{\triangle BTC} = P_{BSTC}.$$

Исто така важи

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CAU = 45^\circ \text{ и } \measuredangle PAB = 90^\circ,$$

па затоа точките P, A, E и U се колинеарни. Дијагоналите на квадратот се заемно нормални и се преполовуваат, па затоа $VC \perp AU$, а точката E е средина на дијагоналата на квадратот $ACUV$. Отсечката EV е висина на триаголникот AUV спуштена на страната AU, но е висина и на триаголникот AVP спуштена кон страната AP. Триаголниците ABC и UAC се складни, па затоа $\overline{AU} = \overline{AB} = \overline{AP}$. Понатаму, важи $P_{\triangle AVP} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{EV}}{2} = \frac{\overline{AU} \cdot \overline{EV}}{2} = P_{\triangle AUV}$. На ист начин се покажува дека $P_{\triangle BRS} = P_{\triangle TBS}$. Оттука $P_{\triangle BRS} = P_{\triangle TBS} = P_{\triangle ACU}$. Според тоа, важи

$$P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{\triangle AUV} + P_{\triangle ACU} = P_{ACUV},$$

со што е докажано тврдењето

$$P_{\triangle ABC} + P_{\triangle CTU} + P_{\triangle AVP} + P_{\triangle BRS} = P_{BSTC} + P_{ACUV}.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ