

Регионален натпревар 1981

I година

1. Да се упрости изразот

$$1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{1980} - \frac{a^{1981}}{1+a}$$

и да се најде неговата вредност за $a = -\frac{4}{5}$.

Решение. Користејќи ја формулата

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - yx^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}y^{n-1}),$$

добиваме

$$\begin{aligned} 1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{1980} - \frac{a^{1981}}{1+a} &= \frac{(1-a+a^2-a^3+\dots+a^{1980})(1+a)-a^{1981}}{1+a} \\ &= \frac{1+a^{1981}-a^{1981}}{1+a} = \frac{1}{1+a} \end{aligned}$$

за $a = -\frac{4}{5}$, вредноста на изразот е 5.

2. Предната гума на еден велосипед се излижува по изминати 250 km, а задната по изминати 150 km. По колку изминати километри треба да ги замениме местата на гумите за да се излижат истовремено?

Решение. Ако по x km треба да ги промениме местата на гумите, тогаш според условот на задачата ќе имаме

$$\frac{x}{250} + \frac{x}{150} = 1,$$

од каде што се добива $x = 93,75$ km.

3. Еден двоцифрен број го има следното својство: ако го собереме со бројот што ги има истите цифри но во обратен редослед се добива полн квадрат.

Да се најдат сите такви двоцифрени броеви.

Решение. Ако x е цифрата на единиците, а y цифрата на десетките на бара-ниот двоцифрен број, тогаш според условот на задачата ќе имаме

$$(10y + x) + (10x + y) = m^2,$$

т.е.

$$11(x + y) = m^2. \quad (1)$$

Според тоа, 11 е делител на m ; ако $m = 11k$, добиваме

$$x + y = 11k^2. \quad (2)$$

Од $1 \leq x \leq 9$ и $1 \leq y \leq 9$, следува дека $2 \leq x + y \leq 18$, што значи дека

$$x + y = 11. \quad (3)$$

Од (3) следува дека бараните броеви се: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

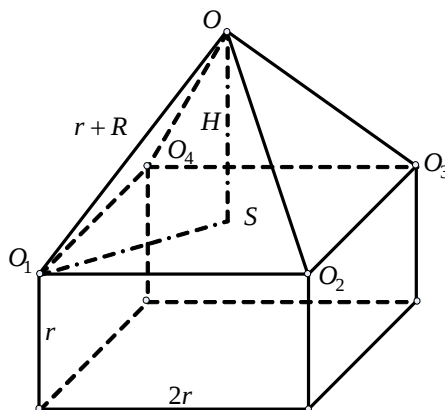
4. На една рамнина се поставени четири топки со ист радиус r , така што секоја од нив допира две други. Друга топка, со радиус R , поставена е така што ги допира сите четири топки. Колкаво е растојанието d од центарот на таа топка до рамнината? Дискусирај ги сите можности.

Решение. Да го сврземе центарот O на петтата топка со центрите O_i , $i=1,2,3,4$, на децните четири топки (види цртеж). Тогаш ќе имаме

$$\begin{aligned} d = H + r &= r + \sqrt{(R+r)^2 - O_1S^2} \\ &= r + \sqrt{(R+r)^2 - 2r^2} \\ &= r + \sqrt{R^2 + 2rR - r^2}. \end{aligned}$$

За $R = r(\sqrt{2} - 1)$ имаме $d = r$, т.е. петтата е меѓу четирите топки.

За $R > r(\sqrt{2} - 1)$, петтата топка е поставена над четирите топки.



II година

1. Да се пресмета изразот

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30},$$

(i е имагинарна единица).

Решение. Ставајќи $x = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ добиваме:

$$x^2 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \quad x^3 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = -1.$$

Според тоа, ќе имаме

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{60} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{30} = x^{60} + (-x^2)^{30} = x^{60} + x^{60} = 2x^{60} = 2(x^3)^{20} = 2.$$

2. На пат од a m предните тркала на еден трактор прават k завртувања повеќе од задните. Да се најде периметарот на секое тркало, ако периметарот на задното тркало е за b m поголем од периметарот на предното тркало.

Решение. Ако x е периметарот на предното тркало, тогаш периметарот на задното тркало ќе биде $x + b$.

На пат од a m задното тркало ќе направи $\frac{a}{x+b}$ завртувања, а предното тркало ќе направи $\frac{a}{x}$ завртувања.

Според условот на задачата ќе имаме $\frac{a}{x} = k + \frac{a}{x+b}$, т.е. $kx^2 + kbx - ab = 0$. Решенијата на ова квадратна равенка се:

$$x_{1/2} = \frac{1}{2k}(-kb \pm \sqrt{k^2b^2 + 4kab}).$$

Решението x_2 е негативно; поради $\sqrt{k^2b^2 + 4kab} > kb$, следува дека решението x_1 е позитивно. Значи, периметарот на предното тркало е

$$x = \frac{1}{2k}(-kb + \sqrt{k^2b^2 + 4kab}),$$

а периметарот на задното тркало е

$$y = \frac{1}{2k}(-kb - \sqrt{k^2b^2 + 4kab}).$$

3. Докажи дека производот на должините на двете отсечки на кои е поделена секоја висина со ортоцентарот во даден триаголник е константа за тој триаголник.

Решение. Триаголниците ARH и HPC се правоаголници и аглиите кај темето H се еднакви, па значи тие се слични. Според тоа, имаме:

$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{HR} : \overline{HP},$$

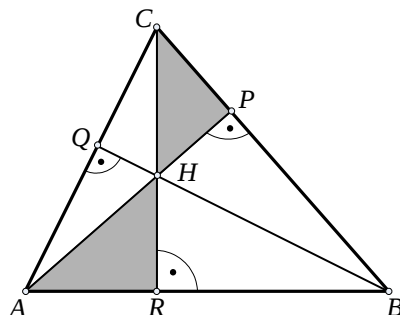
од каде што следува дека

$$\overline{AH} \cdot \overline{HP} = \overline{CH} \cdot \overline{HR},$$

а поради симетрија ќе имаме и

$$\overline{AH} \cdot \overline{HP} = \overline{BH} \cdot \overline{HQ},$$

што и требаше да се докаже.



4. Во паралелограм $ABCD$, на страната AD е земена точка L , на дијагоналата AC точка M и на страната BC точка N , така што важи:

$$5 \cdot \overline{AL} = \overline{AD}, \quad 4 \cdot \overline{AM} = \overline{AC}, \quad 5 \cdot \overline{BN} = 2 \cdot \overline{BC}.$$

а) Да се докаже дека точките L, M и N се колинеарни.

б) Во кој однос точката M ја дели отсечката LN ?

Решение. а) Ставајќи $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$ (види цртеж) ќе имаме

$$\overline{AL} = \frac{1}{5} \overline{AD}, \quad \overline{AM} = \frac{1}{4} \overline{AC}, \quad \overline{BN} = \frac{2}{5} \overline{BC},$$

од каде што добиваме

$$\overline{LM} = \overline{LA} + \overline{AM} = -\frac{1}{5} \vec{b} + \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{20} \vec{b}$$

$$\overline{LN} = \overline{LA} + \overline{AB} + \overline{BN} = -\frac{1}{5} \vec{b} + \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{5} \vec{b}.$$

Според тоа, имаме $\overrightarrow{LN} = 4\overrightarrow{LM}$,
т.е. векторите $\overrightarrow{LN}$ и $\overrightarrow{LM}$ се ко-
линеарни, па и точките L , M и
 N се колинеарни.

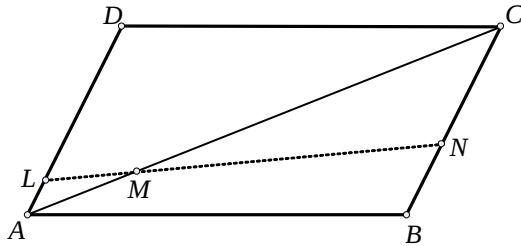
б) Според а), имаме

$$\overrightarrow{LN} = 4\overrightarrow{LM},$$

т.е.

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{LM}, \quad \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{LM}.$$

Значи, точката M ја дели отсечката LN во однос 1:3.



III година

1. При кои вредности на a неравенството $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ важи за секој реален број x ?

Решение. Неравенството (1), при $a^2 - 1 \neq 0$, важи за секој реален број x ако и само ако се исполнети следниве услови:

$$a^2 - 1 > 0, \quad D = 4(-a^2 - 2a + 3) < 0,$$

т.е. ако и само ако: $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и $a \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, од каде што добиваме дека $a \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Во случајот кога $a^2 - 1 = 0$, имаме: левата страна на (1) за $a = 1$ е 2, а за $a = -1$ е $-4x + 2 > 0$, т.е. и $a = 1$ е решение.

Следствено, неравенството (1) важи за секој реален број x ако и само ако $a \in (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$.

2. Ако важи $\sin \alpha + \sin \beta = a$, $\cos \alpha + \cos \beta = b$, $a^2 + b^2 \neq 0$, тогаш

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Докажи!

Решение. Ако равенствата $\sin \alpha + \sin \beta = a$ и $\cos \alpha + \cos \beta = b$ ги помножиме меѓусебно, ќе добиеме

$$\begin{aligned} ab &= \sin(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta \\ &= \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}[\sin 2\alpha + \sin 2\beta] \\ &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Ако пак ги quadriраме и ги собереме, добиваме

$$a^2 + b^2 = 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = 2 + 2\cos(\alpha - \beta) = 2[1 + \cos(\alpha - \beta)].$$

Според тоа, ќе имаме:

$$ab = \frac{a^2+b^2}{2} \sin(\alpha + \beta),$$

т.е.

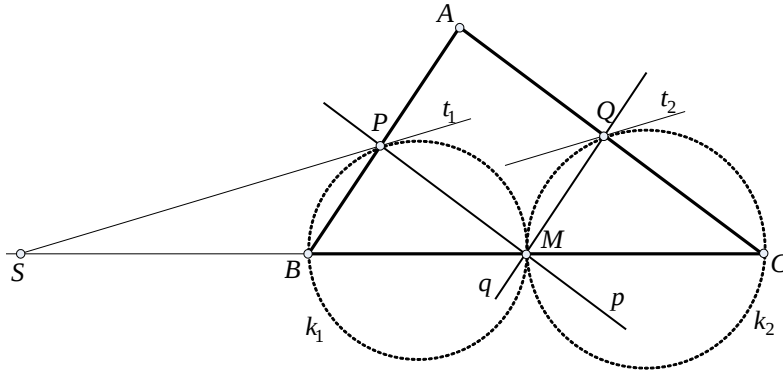
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

што и требаше да се докаже.

3. Нека M точка од страната BC на триаголникот ABC . Низ точката M се повлечени прави p и q паралелни со AC и AB соодветно. Нека $P = p \cap AB$, $Q = q \cap AC$, а k_1 и k_2 се кружниците опишани околу триаголниците BMP и CMQ соодветно.

Да се докаже дека тангентите t_1 и t_2 , повлечени на k_1 и k_2 соодветно во точките P и Q се паралелни.

Решение. Нека $S = PQ \cap BC$, а χ нека е хомотетија со центар S и коефициент $m = \frac{SM}{SB}$; тогаш $\chi(B) = M$. Од $BP \parallel MQ$ и $MP \parallel CQ$ следува дека $\chi(M) = C$ и



$\chi(P) = Q$, а од тоа пак $\chi(k_1) = k_2$.

Од $\chi(k_1) = k_2$ и $\chi(P) = Q$, следува дека $\chi(t_1) = t_2$, што значи дека $t_1 \parallel t_2$.

4. Околу триаголникот ABC со агол $\beta = 2\delta < \frac{\pi}{3}$ е опишана кружница k со радиус R чиј дијаметар го преполовува аголот β . Да се најде плоштината на триаголникот ABM ако $M = t \cap BC$, каде што t е тангента на k повлечена во точката A .

Решение. Бидејќи дијаметарот на опишаната кружница е симетрала на аголот β (види цртеж), следува дека триаголникот ABC е рамнокрак. Според тоа, ќе имаме

$$\alpha = 90^\circ - \delta, \angle CAM = 2\delta, \angle ACM = 90^\circ + \delta, \angle AMC = 90^\circ - 3\delta.$$

Применувајќи ја синусната теорема за $\triangle ABC$, добиваме

$$\overline{AC} = 2R \sin 2\delta, \quad \overline{AB} = 2R \sin(90^\circ - \delta) = 2R \cos \delta;$$

ако пак ја примениме на триаголникот $\triangle AMC$, ќе добиеме:

$$\overline{AM} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(90^\circ + \delta)}{\sin(90^\circ - 3\delta)} = 2R \frac{\cos \delta}{\cos 3\delta} \sin 2\delta.$$

За плоштината на триаголникот $\triangle ABM$:

$$P = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AM} \sin(90^\circ + \delta) = 4R^2 \frac{\sin \delta \sin^4 \delta}{\cos 3\delta}.$$

IV година

1. Една права p која што минува низ координатниот почеток, ги сече правите $x + y - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ во точките A и B соодветно. Да се најде геометриското место на средините на отсечките AB , кога правата p ротира околу координатниот почеток.

Решение. Равенка на произволна права низ координатниот почеток има облик $y = kx$. Пресечните точки на ова права со правите $x + y - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ се $A(\frac{1}{1+k}, \frac{k}{1+k})$, $B(\frac{1}{1-k}, \frac{k}{1-k})$, при $k \neq \pm 1$. Нека $M(x, y)$ е средина на отсечката AB . Тогаш

$$x = \frac{1}{1-k^2}, \quad y = \frac{k}{1-k^2}.$$

Со елиминација на k добиваме $y^2 = x(x-1)$, што претставува равенка на бараното геометриско место на точки, а тоа е хипербола.

2. Во правилен тетраедар $ABCO$, средината S на висината, спуштена од темето O , е сврзана со темињата A, B, C . Да се докаже дека отсечките SA, SB, SC се заемно нормални.

Решение. Ќе покажеме само дека триаголникот ASC е правоаголен со прав агол кај темето S (види цртеж). Нека a е работ на тетраедарот; тогаш имаме

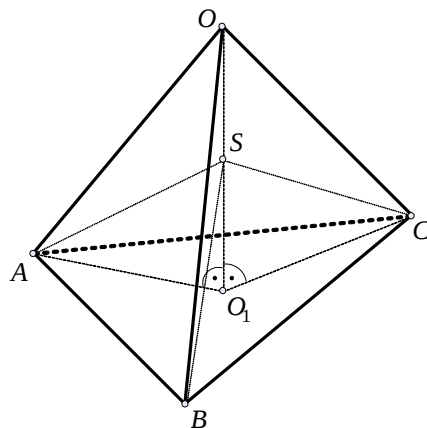
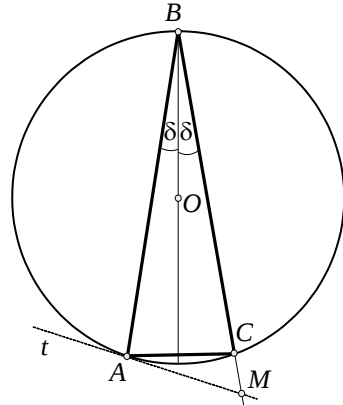
$$\overline{AO_1} = \overline{CO_1} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \overline{SO_1} = \frac{a}{6} \sqrt{6},$$

$$\overline{AS} = \overline{CS} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Бидејќи

$$\overline{AS}^2 + \overline{CS}^2 = a^2 = \overline{AC}^2,$$

следува дека $\triangle ASC$ е правоаголен



триаголник со прав агол кај темето S , т.е. $AS \perp CS$.

3. Нека $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \phi$. Да се докаже дека $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\phi$ за секој природен број n .

Решение. Доказот ќе го дадеме вршејќи индукција по n .

За $n = 1$ тврдењето е точно според условот. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за секој $n \leq k$, т.е. за секој $n \leq k$ важи

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\phi.$$

Бидејќи

$$(x^k + \frac{1}{x^k})(x + \frac{1}{x}) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}},$$

добиваме

$$\begin{aligned} x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} &= (x^k + \frac{1}{x^k})(x + \frac{1}{x}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) \\ &= 2 \cos k\phi \cdot 2 \cos \phi - 2 \cos (k-1)\phi \\ &= 2 \cdot 2 \cos k\phi \cos \phi - 2 \cos (k-1)\phi \\ &= 2 \cos (k+1)\phi \end{aligned}$$

Според тоа, тврдењето е точно за секој природен број n .

4. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ е аритметичка прогресија. Да се докаже дека

$$a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{2k-1}^2 - (a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{2k}^2) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2).$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{2k-1}^2 - (a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{2k}^2) &= \\ &= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k})(a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= -d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= -dk(a_1 + a_{2k}) \\ &= \frac{k}{2k-1}(a_1 - a_{2k})(a_1 + a_{2k}) \\ &= \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.