XXX олимпијада

1. Докажи дека множеството $\{1,2,...,1989\}$ може да се подели на 117 дисјунктни подмножества $A_1, A_2,..., A_{117}$ за кои е исполнето:

(*a*) A_i има 17 елементи за $i = 1,2,3,...,117$;

(*b*) во секое множество A_i, $i = 1,2,3,...,117$ збирот на елементите е еднаков.

Решение. Множеството $\{1,2,...,1989\}$ да го претставиме како унија од множествата $P = \{1,2,...,351\}$ и

$$M_s = \{351+234s+1, 352+234s+2,..., 351+234s+234\},\ s = 1,2...,6\ .$$

Множеството P го делиме на 117 дисјунктни подмножества со по три елементи $P_i, i = 1,2,...,117$ така што збирот на броевите во секое подмножество е еднаков. Една таква поделба е следнава:

$$P_i = \{i, 175+i, 353-2i\}, i = 1,2,...,59,$$
$$P_k = \{59+k, 117+k, 352-2k\},\ k = 1,2,...,58.$$

Секое од мноижествата M_s може да се подели на 117 дисјунктни подмножества $M_{s_1}, M_{s_2},..., M_{s_{117}}$ со по два броја, така што збирот на броевите во секое од тие подмножества ќе биде еднаков. Тогаш баранаа поделба на множеството $\{1,2,...,1989\}$ ќе биде следнава:

$$A_i = P_i \cup (\bigcup_{i=0}^{6} M_{s_i}),\ i = 1,2,...,117\ .$$

2. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ во кој симетралите на внатрешните агли во темињата A, B, C ја сечат опишаната кружница и во точки A_1, B_1, C_1, соодветно. Нека A_0 е пресечна точка на правата AA_1 со симетралите на надворешните агли кај темињата B и C. Точките B_0 и C_0 се одредени аналогно. Докажи дека

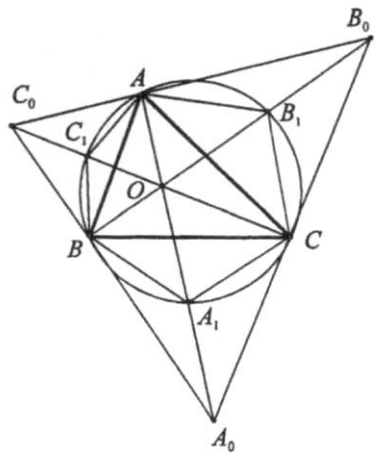
а) плоштината на триаголникот $A_0B_0C_0$ е два пати поголема од плоштината на шестаголникот $AC_1BA_1CB_1$;

б) плоштината на триаголникот $A_0B_0C_0$ е најмалку четири пати поголема од плоштината на триаголникот ABC.

Решение. а) Нека O е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC (види цртеж). Ќе докажеме дека $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_0}$. Правите BO и BA_0 се соодветно симетрали на внатрешниот и надворешниот агол во темето B на триаголникот ABC, па затоа тие се заемно нормални. Значи $\measuredangle OBA_0 = 90^\circ$. Освен тоа важи

$$\measuredangle A_1OB = \measuredangle A_1AB + \measuredangle B_1BA$$
$$= \measuredangle A_1AC + \measuredangle B_1BC$$
$$= \measuredangle A_1BC + \measuredangle B_1BC = \measuredangle OBA_1,$$

па затоа $\overline{OA_1} = \overline{BA_1}$, односно триаголникот OBA_1 е рамнокрак. Освен тоа, бидејќи $\measuredangle OBA_0 = 90^\circ$, добиваме



$$\measuredangle A_1BA_0 = 90^\circ - \measuredangle OBA_1$$
$$= 90^\circ - \measuredangle A_0OB = \measuredangle A_1A_0B,$$

од каде што следува дека $\overline{BA_1} = \overline{A_1A_0}$. Затоа $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_0} = \overline{BA_1}$. Користејќи дека A_1 е средина на OA_0 добиваме

$$P_{\triangle OBA_0} = 2P_{\triangle OBA_1} \text{ и } P_{\triangle OCA_0} = 2P_{\triangle OCA_1}.$$

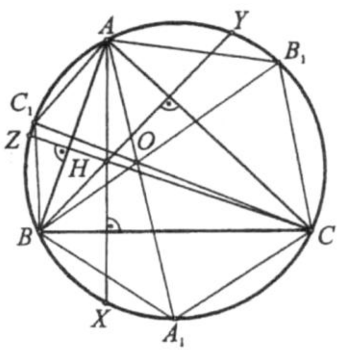
Аналогно важи

$$P_{\triangle OBC_0} = 2P_{\triangle OBC_1} \text{ и } P_{\triangle OAC_0} = 2P_{\triangle OAC_1},$$
$$P_{\triangle OCB_0} = 2P_{\triangle OCB_1} \text{ и } P_{\triangle OAB_0} = 2P_{\triangle OAB_1}.$$

Ако ги собереме последните шест равенства добиваме

$$P_{\triangle A_0B_0C_0} = 2P_{AC_1BA_1CB_1}.$$

б) Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC и нека правите AH, BH и CH ја сечат опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките X, Y и Z, соодветно. Ќе докажеме дека точката X е симетрична на H во однос на правата BC (цртеж десно). Навистина, $\measuredangle CBX = \measuredangle CAX$ како периферни агли над тетивата CX, а освен тоа



$$\measuredangle CAX = 90^\circ - \measuredangle BCA = \measuredangle HBC.$$

Значи, $\measuredangle CBX = \measuredangle CBH$ и бидејќи $HX \perp BC$ добиваме дека точката X е симетрична на H во однос на правата BC.

Бидејќи AA_1 е симетрала на $\measuredangle BAC$, точката A_1 е средина на лакот BC, па затоа $P_{\triangle BA_1C} \geq P_{\triangle BXC} = P_{\triangle BHC}$. Според тоа,

$$\tfrac{1}{2}P_{\triangle A_0B_0C_0} = P_{AC_1BA_1CB_1} \geq P_{AZBXCY} = 2(P_{\triangle BHC} + P_{\triangle CHA} + P_{\triangle AHB}) = 2P_{\triangle ABC}.$$

3. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и S е множество од n точки од рамнината такви што:

а) било кои три точки од S не се колинеарни,

b) за секоја точка P од S постојат најмалку k различни точки од S кои се еднакво оддалечени од P .

Докажи дека

$$0 < k < \tfrac{1}{2} + \sqrt{2n} .$$

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. Разгледуваме точка P од S . Постојат барем k точки од S , кои се еднакво оддалечени од P , па затоа постојат барем $\binom{k}{2}$ парови точки A, B за кои важи $\overline{AP} = \overline{BP}$. Бидејќи ова важи за секоја точка P од S , постојат барем $n\binom{k}{2}$ парови точки A, B такви што на симетралата на отсечката AB се наоѓа барем една точка од S . Притоа еден пар точки (A, B) , односно (B, A) може да биде броен повеќе пати, по еднаш за секоја точка $Q \in S$ таква што $\overline{AQ} = \overline{BQ}$.

Од претпоставката $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ добиваме

$$\begin{aligned} n \cdot \tbinom{k}{2} &= n\frac{k(k-1)}{2} \geq \tfrac{n}{2}(\sqrt{2n} + \tfrac{1}{2})(\sqrt{2n} - \tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{n}{2}(2n - \tfrac{1}{4}) = n(n - \tfrac{1}{8}) \\ &> n(n-1) = 2\tbinom{n}{2}. \end{aligned}$$

Меѓу точките од S има точно $\binom{n}{2}$ различни парови, па затоа ќе постои еден пар точки A, B кој што е броен барем три пати, односно постојат различни точки $P_1, P_2, ..., P_m$, $m > 2$ такви што $\overline{AP_i} = \overline{BP_i}$, $i = 1, 2, ..., m$. Тие лежат на симетралата на отсечката AB . Овие точки $P_1, P_2, ..., P_m$, $m > 2$ се колинеарни што противречи на условот а) на задачата.

4. Даден е конвексниот четириаголник $ABCD$ со следните својства:

a) $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$,

b) во внатрешноста на четириагоникот $ABCD$ постои точка P која од правата CD е на растојание h , таква што $\overline{AP} = h + \overline{AD}$ и $\overline{BP} = h + \overline{BC}$.

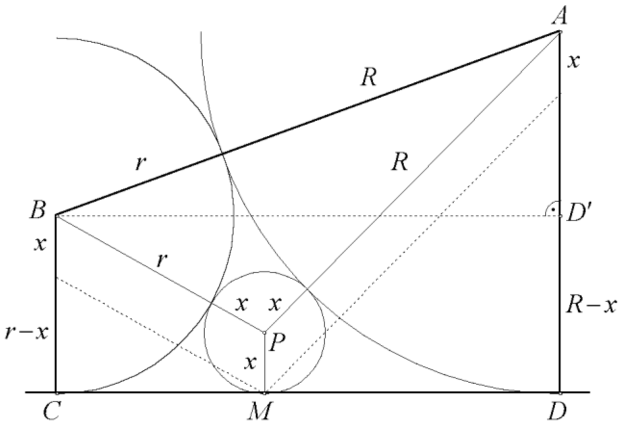
Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{\overline{AD}}} + \frac{1}{\sqrt{\overline{BC}}} .$$

Решение. Јасно h е максимално ако CD е тангента на кружница со центар во A и радиус $R = \overline{AD}$ и тангента на кружница со центар B и радиус $r = \overline{BC}$ (види цртеж).

Нека $h_{\max} = x$. Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CD} = \overline{BD'} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD'}^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \qquad (1)$$



$$\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{MD} = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} + \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}$. Значи,

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{r}+\sqrt{R}}{\sqrt{Rr}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

5. Докажи дека за секој природен број n постојат n последователни природни броеви такви што ниту еден не е степен на прост број.

Решение. *Прв начин.* Да забележиме дека ако a и b се природни броеви такви што $b \neq 1$ и $a \geq 2b$, тогаш $m = a! + b$ не е степен на прост број. Од овде следува дека условот на задачата е исполнет за следниве броеви:

$$(2n^2)! + n,\ (2n^2)! + n + 1,\ \ldots,\ (2n^2)! + 2n - 1.$$

Втор начин. Нека n е природен број и да ставиме $k = (n+1)!^2 + 1$. Ќе докажеме дека ниту еден од броевите $k+1, k+2, \ldots, k+n$ не е степен на прост број. Забележуваме дека за секој $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ бројот $k + j = (n+1)!^2 + j + 1$ е делив со $j+1$. Да претпоставиме дека за некој $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $k + j = p^m$, каде што p е прост број и m е природен број. Тогаш $1 + j = p^s$ за некој природен број $s, s < m$. Тогаш $p^{s+1} \mid (n+1)!^2$ и $p^{s+1} \mid k + j$, односни $p^{s+1} \mid k - 1$ и $p^{s+1} \mid k + j$. Затоа, $p^{s+1} \mid k + j - (k-1) = j + 1$, што е противречност.

6. Нека $n \in \mathbb{N}$. За пермутацијата $\{x_1, \ldots x_{2n}\}$ на множеството $\{1, \ldots, 2n\}$ ќе велиме дека го има својството P ако $|x_i - x_{i+1}| = n$, за некој $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$.
Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот на пермутации кои го имаат својството P е поголем од бројот на пермутации кои го немаат тоа својство.

Решение. Соседните броеви x_i, x_{i+1} од некоја пермутација ги нарекуваме близнаци ако $|x_i - x_{i+1}| = n$. Со A го означуваме множеството од сите пермутации кои немаат близнаци, а со B множеството од сите пермутации кои имаат барем еден пар близнаци. Дефинираме пресликување $f: A \to B$ кое на секоја пермутација $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ од A и ја придружува пермутацијата $(x_2, ..., x_{k-1}, x_1, x_k, ..., x_{2n})$ од B, така што x_1 и x_k се близнаци. Вака дефинираното пресликување е добро дефинирано бидејќи ако x_1 не е близнак со x_2, ќе постои единствено x_k, $k > 2$ таков што x_1 е близнак со x_k. Тогаш $(x_2, ..., x_{k-1}, x_1, x_k, ..., x_{2n}) \in B$. Ова пресликување е инјекција, но не е сурјекција бидејќи во $f(A)$ нема пермутација со повеќе од еден пар близнаци. Значи, множеството B има повеќе елементи од множеството A.