Сојузен натпревар 1982

I година

1. Ако за природните броеви a,b,c,d важи $(a+b)^2+a=(c+d)^2+c$, докажи дека $a=c$ и $b=d$.

Решение. Ако $a=c$, тогаш од даденото равенство лесно следува дека $b=d$. Нека претпоставиме дека $a\neq c$, на пример, $a<c$. Тогаш даденото равенство можеме да го запишеме во видот

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)=c-a. \qquad (1)$$

Бидејќи $c-a>0$, од (1) добиваме $a+b-c-d>0$. Но дадените броеви се природни, па затоа мора да важи $a+b-c-d\geq 1$. Сега, од (1) следува $c-a\geq a+b+c+d$, односно $2a+b+d\leq 0$, што не е можно, бидејќи дадените броеви се природни. Значи, мора да важи $a=c$, па затоа и $b=d$.

2. Дадени се n сијалици $(n>13)$ од кои секоја има свој прекинувач. Дозволено е истовремено да се промени состојбата на точно 13 сијалици. На почетокот некои сијалици се запалени, а некои не се запалени.

а) Дали е можно да се изгаснат сите сијалици?

б) Кој е најмалиот број чекори за гасење на сите сијалици ако $n=111$ и ако сите сијалици на почетокот се запалени?

Решение. а) Можно е. Ако на почетокот бројот на запалените сијалици е поголем од 13, тогаш гаснејќи по 13 сијалици секогаш можеме да дојдеме до состојба кога имаме помалку од 13 запалени сијалици. Јасно, во овој случај доволно е задачата да ја решиме при претпоставка дека $n=14$. Прво нека претпоставиме дека свети само една сијалица. Тогаш можеме да постапиме на начин како што е прикажано во табелата:

запалени	1	12	3	10	5	8	7	6	9	4	11	2	13	0
угасени	13	2	11	4	9	6	7	8	5	10	3	12	1	14

Јасно, ако бројот на запалените сијалици на почетокот бил било кој друг број меѓу 2 и 12 треба ба соодветното место да се приклучиме во постапката која ја опишува табелата.

б) Заради $8\cdot 13<111$, добиваме дека осум чекори не се доволни сите сијалици да се угасат. Ќе докажеме дека се доволни девет чекори. Во првите седум чекори гасиме по 13 сијалици и преостануваат 20 запалени. Во осмиот чекор гасиме 10 и палиме 3 сијалици и во деветтиот чекор ги гасиме преостанатите 13 запалени сијалици.

3. Во рамнината се дадени шест кругови, такви што центарот на ниту еден од нив не е содржан во унијата на преостанатите пет. Докажи дека пресекот на овие шест кругови е празно множество.

Решение. Нека претпоставиме дека дадените кругови имаат заедничка точка P. Да ја поврземе точката P со центрите $S_1, S_2, ..., S_6$ на дадените кругови. Барем еден од аглите S_iPS_j ќе биде помал или еднаков на 60°. Тогаш во триаголникот S_iPS_j еден од преостанатите два агли, на пример $\measuredangle S_jS_iP$, е поголем или еднаков на 60°, т.е. е поголем или еднаков на $\measuredangle S_iPS_j$. Затоа $PS_j \geq S_iS_j$. Но, точката P припаѓа на кругот со центар S_j, па следува дека и точката S_i припаѓа на тој круг, што противречи на претпоставката.

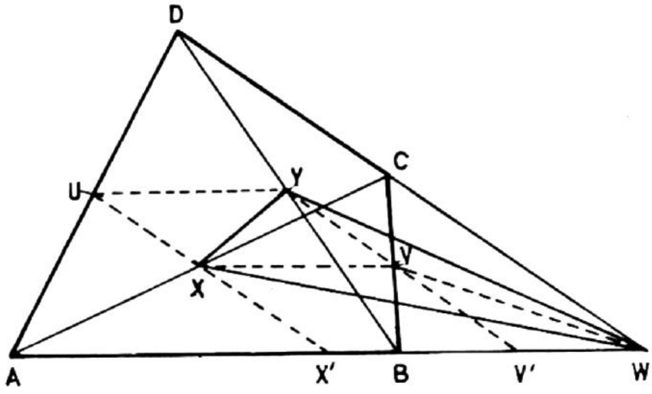
4. Нека правите определени со спротивните страни AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката W и нека X и Y се средините на дијагоналите AC и BD. Докажи дека $P_{ABCD} = 4P_{XYW}$.

Решение. Нека, заради определеност, правите AB и CD се сечат на онаа страна од точката A на која е точката B. Нека U и V се соодветно средините на страните AD и BC на четириаголникот $ABCD$, види цртеж. Отсечката XV е средна отсечка на триаголникот ABC, па затоа таа е паралелна и е еднаква на половина од отсечката AB. Точките C и W се еднакво оддалечени од правата XV, па затоа

$$P_{XWV} = P_{XVC} = \frac{1}{4}P_{ABC}. \qquad (1)$$

Аналогно се добива

$$P_{YVW} = P_{YBV} = \frac{1}{4}P_{DBC}. \qquad (2)$$



Останува уште да ја определиме плоштината на триаголникот XVY. Отсечките XV и YU се средни отсечки на триаголниците ABC и ABD, кои имаат заедничка основа AB, па затоа четириаголникот $XVYU$ е паралелограм и важи $P_{XVY} = \frac{1}{2}P_{XVYU}$. Нека X' и V' се точките во кои правите UX и YV соодветно ја сечат правата AB. Паралелограмот $X'V'YU$ има основа еднаква на половина од основата на триаголникот ABD и висина еднаква на половина од неговата висина, па затоа $P_{X'V'YU}=\frac{1}{2}P_{ABD}$. Слично, $P_{X'V'VX}=\frac{1}{2}P_{ABC}$. Затоа,

$$P_{XVY}=\frac{1}{2}P_{XVYU}=\frac{1}{2}(P_{X'V'YU}-P_{X'V'VX})=\frac{1}{4}(P_{ABD}-P_{ABC}). \qquad (3)$$

Сега од равенствата (1), (2) и (3), добиваме

$$P_{XWY}=P_{XWV}+P_{YVW}+P_{XVY}=\frac{1}{4}(P_{ABC}+P_{DBC}+P_{ABD}-P_{ABC})=\frac{1}{4}P_{ABCD},$$

што и требаше да се докаже.

II година

1. Определи го множеството S со најмал број елементи за кое се исполнети следниве услови:

а) $S\subset\{0,1,2,3,...\}$,

б) $1981\in S$,

в) Ако $x,y,z\in S$, тогаш остатокот од делењето на $x+y+z$ со 1982 исто така припаѓа на S.

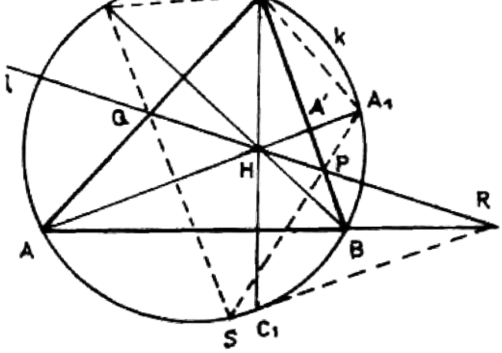
Решение. Ќе докажеме дека сите непарни броеви 1, 3, ..., 1981 припаѓаат на множеството S. Последното следува од б) и в) врз основа на следниве конгруенции:

$$3\cdot 1981\equiv 1979 \pmod{1982},$$
$$2\cdot 1981+1979\equiv 1977 \pmod{1982},$$
$$2\cdot 1981+1977\equiv 1975 \pmod{1982},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$2\cdot 1981+3\equiv 1 \pmod{1982}.$$

Бидејќи множеството $S=\{1,3,...,1981\}$ ги задоволува сите услови на задачата, тоа воедно е и множеството со најмал број елементи кое ги има наведените својства.

2. Низ ортоцентарот на триаголникот ABC е повлечена права l. Докажи дека правите кои на неа се симетрични во однос на страните на триаголникот се сечат на опишаната кружница околу триаголницата ABC.

Решение. Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC, A_1, B_1, C_1 се точките во кои висините AH, BH, CH ја сечат неговата опишана кружница k и P,Q,R се соодветно точките во кои дадената права l ги сече правите BC, CA, AB, ако тие пресеци постојат, (цр-



теж десно). Лесно се докажува дека точките H и A_1 се симетрични во однос на правата BC. Навистина, важи $\measuredangle A_1CB = \measuredangle A_1AB$ (перифериски агли на еднакви лаци) и $\measuredangle HCB = \measuredangle A_1AB$ (агли со нормални краци), па ако со A' го означиме подножјето на висината AH имаме $\measuredangle A_1CA' = \measuredangle HCA'$, што значи дека правоаголните триаголници A_1CA' и HCA' се складни. Оттука следува $A'A_1 = A'H$. Слично, точките H и B_1 се симетрични во однос на правата CA. Затоа правите , симетрични на правата l во однос на правите BC и CA ги содржат соодветно точките A_1 и B_1. Со S да го означиме пресекот на овие прави. Во четириаголникот A_1CB_1S важи

$$\measuredangle SA_1C + \measuredangle CB_1S = \measuredangle PHC + \measuredangle CHQ = 180^\circ,$$

па затоа тој е тетивен, т.е. точката точката S припаѓа на опишаната кружница k околу него.

Слично се докажува дека и правата симетрична на правата l во однос на правата AB ја содржи точката S, т.е. сите три прави се сечат на кружницата k.

3. Нека k,n и $a_1,a_2,...,a_k$ се природни броеви за кои важи

$$a_1 < a_2 < ... < a_k \le n \text{ и } k > [\tfrac{n+1}{2}].$$

Докажи дека постојат броеви i и r такви што $a_i + a_1 = a_r$.

Решение. Да ги разгледаме $2k-1 > n$ целите броеви

$$a_1, a_2, ..., a_k, a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_k - a_1$$

кои припаѓаат на интервалот $[1,n]$. Од принципот на Дирихле следува дека некои два од овие броеви се еднакви меѓу себе. Но, $a_i \ne a_j$ за $i \ne j$, па затоа постојат $i,r \in \{1,2,...,k\}$ такви што важи $a_i = a_r - a_1$.

4. Определи реални броеви a и b такви што за произволни реални броеви u и v важи:

$$\max_{0\le x\le 1} |x^2 - ux - v| \ge \max_{0\le x\le 1} |x^2 - ax - b|.$$

Решение. Лесно се докажува дека $\max\limits_{0\le x\le 1} |x^2 - x + \frac{1}{8}| = \frac{1}{8}$. Ќе докажеме дека за произволни реални броеви u и v важи $\max\limits_{0\le x\le 1} |x^2 - ux - v| \ge \frac{1}{8}$. Нека претпоставиме дека за некои броеви u и v максимумот на функцијата $f(x) = |x^2 - ux - v|$ на интервалот $[0,1]$ е помал од $\frac{1}{8}$, т.е. дека $f(x) < \frac{1}{8}$ за секој $x \in [0,1]$. Тогаш

$$|v| = f(0) < \tfrac{1}{8},\ |\tfrac{1}{4} - \tfrac{u}{2} - v| = f(\tfrac{1}{2}) < \tfrac{1}{8},\ |1 - u - v| = f(1) < \tfrac{1}{8},$$

од каде што следува

$$\tfrac{1}{2}=|(1-u-v)-2(\tfrac{1}{4}-\tfrac{u}{2}-v)-v|\le|1-u-v|+2|\tfrac{1}{4}-\tfrac{u}{2}-v|+|v|<\tfrac{1}{8}+2\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{2},$$

што е противречност. Значи, бараните броеви се $a=1, b=-\frac{1}{8}$.

III и IV година

1. Определи ги сите полиноми со целобројни коефициенти $p(x)$, такви што за секој реален број x важи

$$16p(x^2)=[p(2x)]^2.$$

Решение. Нека $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$ е бараниот полином. Ако во даденото равенство ставиме $x=0$ добиваме $16a_0=a_0^2$, од што следува $a_0=0$ или $a_0=16$. Од друга страна, ако ги изедначиме коефициентите пред x^{2n} во даденото равенство, тогаш ја добиваме равенката $16a_n=2^{2n}a_n^2$ и како $a_n\neq 0$, добиваме $a_n=\frac{16}{4^n}$. Но, a_n е цел број, па затоа $n=0$ или $n=1$ или $n=2$.

За $n=0$ полиномите се $p(x)=0$ и $p(x)=16$.

За $n=1$ можни полиноми се $p(x)=4x$ и $p(x)=4x+16$. Притоа, само $p(x)=4x$ ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ можни полиноми се $p(x)=x^2+a_1x$ и $p(x)=x^2+a_1x+16$. Со непосредна проверка добиваме $a_1=0$ и само $p(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата.

2. Докажи дека

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}2^\circ...\operatorname{tg}44^\circ}<\operatorname{tg}22^\circ30'<\tfrac{1}{44}(\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}2^\circ+...+\operatorname{tg}44^\circ). \qquad (*)$$

Решение. Да означиме $x=22^\circ30'$. Тогаш $\operatorname{tg}x=\sqrt{2}-1$ и $\operatorname{tg}^2x=1-2\operatorname{tg}x$. Од последните две равенства лесно се добива дека за $0^\circ<\alpha<45^\circ$ $(\alpha\neq x)$ важи

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)-2\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha+\tfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}-2\operatorname{tg}x=\tfrac{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}x)^2}{1+\operatorname{tg}\alpha}>0. \qquad (1)$$

Ако во неравенството (1) последователно ставиме $\alpha=1^\circ,2^\circ,...,22^\circ$ и ги собереме добиените неравенства, го добиваме десното неравенство во (*). Од (1) следува дека за $0^\circ<\alpha<x$ важи

$$1=\operatorname{tg}45^\circ=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}>\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}=\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)},$$

т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)<\operatorname{tg}^2 x\,.$$

Ако во последното неравенство последователно ставиме $\alpha=1^\circ,2^\circ,...,22^\circ$ и ги помножиме добиените неравенства го добиваме левото неравенство во (*).

3. Нека M е множеството од сите точки во рамнината со целобројни координати и S е некое негово подмножество. За пресликувањето $f:S\to S$ велиме дека е „*соседно*“, ако f е биекција и за секој $P\in S$ точките P и $f(P)$ се соседни. Ако постои „*соседно*“ пресликување $f:S\to S$, докажи дека постои и „*соседно*“ пресликување $g:S\to S$ кое го задоволува условот $g(g(P))=P$ за секој $P\in S$.

Решение. Нека S_1 е подмножеството точки од S кај кои збирот на координатите е парен број, а $S_2=S\setminus S_1$. Тогаш, сите точки на множеството S, кои се соседни на некоја точка $P_1\in S_1$ се во мноижеството S_2, и обратно, сите точки на множеството S кои се соседни на некоја точка $P_2\in S_2$ се во множеството S_1. Затоа рестрикцијата на „*соседно*“ пресликување $f:S\to S$ на множествато S_1 е бикеција во множеството S_2 и рестрикцијата на множеството S_2 е бикеција во множеството S_1. Инверзното пресликување f^{-1} исто така е биекција, па затоа пресликувањето $g:S\to S$ определено со

$$g(P)=\begin{cases} f(P), & P\in S_1,\\ f^{-1}(P), & P\in S_2,\end{cases}$$

е соседно и важи $g(g(P))=P$ за секој $P\in S$.

4. Докажи дека постои точно една четворка (x,y,z,t) природни броеви со следниве својства:

а) $1<x<y<z<t$,

б) производот на било кои три од тие броеви зголемен за 1 е делив со четвртиот број.

Решение. Од условот на задачата следува

$$xyz+1=at,\quad xyt+1=bz,\quad xzt+1=cy,\quad yzt+1=dx,$$

за некои природни броеви a,b,c,d. Оттука непосредно следува дека броевите x,y,z,t се по парови замено прости. Ако ги помножиме овие равенства добиваме дека бројот $xyz+xyt+xzt+yzt+1$ е делив со $xyzt$. Затоа

$$S=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{t}+\tfrac{1}{xyzt}$$

е природен број. Според условот на здачата $x\ge 2, y\ge 3, z\ge 4, t\ge 5$, од каде следува

$$0<S\le \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{120}=\frac{155}{120},$$

па затоа $S=1$. Ако $x\ge 3$, тогаш $y\ge 4, z\ge 5, t\ge 6$ и

$$1=S\le \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{360}=\frac{343}{360},$$

што е противречност. Значи, $x=2$ и

$$1=\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{1}{yzt}.$$

Броевите y,z,t се непарни бидејќи се заемно прости со 2. Ако $y>3$, тогаш $y\ge 5$, $z\ge 7, t\ge 9$ и

$$1\le \frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\frac{1}{315}=\frac{287}{315},$$

што е противречност. Значи, $y=3$ и

$$1=\frac{6}{z}+\frac{6}{t}+\frac{1}{zt},$$

од каде добиваме $z=6+\frac{37}{t-6}$. Бидејќи $z<t$ од последната равенка лесно следува дека $z=7$ и $t=43$.

Непосредно се проверува дека четворката $(2,3,7,43)$ ги задоволува условите на задачата.

Мала олимпијада

1. Нека p е прост број поголем од 2. За $k=1,2,...,p-1$ со a_k да го означиме остатокот од делењето на бројот k^p со p^2. Докажи дека

$$a_1+a_2+...+a_{p-1}=\frac{p^3-p^2}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Имаме:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}=(a_1+a_{p-1})+(a_2+a_{p-2})+\ldots+(a_{\frac{p-1}{2}}+a_{\frac{p+1}{2}}).$$

За $k\in\{1, 2,..., p-1\}$ изразот $k^p+(p-k)^p$ го развиваме по биномната формула и добиваме дека истиот е делив со p^2. Бидејќи $a_k<p^2$ и $a_{p-k}<p^2$, заклучуваме дека $a_k+a_{p-k}=p^2,$ односно важи (1).

2. Определи ги сите полиноми $P_n(x)$ од видот

$$P_n(x)=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+(-1)^n n(n+1)$$

со целобројни коефициенти за чии корени $x_i, i=1,2,...,n$ важи

$$x_i\in[i,i+1], \text{ за } i=1,2,...,n.$$

Решение. За $n=1$ единствен полином од бараниот облик е $P_1(x)=x-2$ и тој ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ треба да најдеме цел број a_1 таков да

$$P_2(x)=2x^2+a_1x+6$$

ги задоволува условите на задачата. Тогаш за корените на овој полином важи

$$1\le x_1\le 2\le x_2\le 3,\quad x_1+x_2=-\tfrac{a_1}{2},\; x_1x_2=3.$$

Од овие неравенства добиваме $0\le x_2-x_1\le 2$, па затоа

$$0\le (x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\tfrac{1}{4}a_1^2-12\le 4\text{, т.е. } 48\le a_1^2\le 64$$

и исто така и $a_1<0$. Но, a_1 е цел број, па од последните неравенства следува $a_1=-7$ или $a_1=-8$. Лесно се проверува дека за најдените вредности на a_1 условите на задачата се исполнети.

Ќе докажеме дека за $n\ge 3$ не постои полином за кој се исполнети условите на задачата. Нека е

$$\begin{aligned}P_n(x)&=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+(-1)^n n(n+1)\\&=n!(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n).\end{aligned}$$

Тогаш

$$(-1)^n n(n+1)=n!(-1)^n x_1x_2...x_n,$$

па од $x_i\in[i,i+1]$, за $i=1,2,...,n$ следува

$$n!\le x_1x_2...x_n=\tfrac{(n+1)!}{(n-1)!}\le\tfrac{n+1}{2}<n<n!,$$

што е противречност.

Значи, бараните полиноми се $x-2$, $2x^2-7x+6$ и $2x^2-8x+6$.

3. Дадени се реални броеви $x_k>1, k=1,2,...,2n$. Докажи дека интервалот $[0,2]$ содржи најмногу $\binom{2n}{n}$ збирови од видот $\sum\limits_{k=1}^{2n}a_kx_k$, каде $a_k\in\{-1,1\}$, за секој $k=1,2,...,2n$.

Решение. Да забележиме дека на секој збир $\sum\limits_{k=1}^{2n}a_kx_k$ соодветствува разбивање $S\cup T$ на множеството $\{1,2,...,2n\}$ определено со $k\in S\Leftrightarrow a_k=-1, k\in T\Leftrightarrow a_k=1$. Нека

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{2n}a_kx_k\ ,\ \sigma_2=\sum_{k=1}^{2n}b_kx_k$$

се два такви збира, $a_k,b_k\in\{-1,1\}$ и нека се $S_1\cup T_1$ и $S_2\cup T_2$ соодветните разбивања на множеството $\{1,2,...,2n\}$. Нека претпоставиме дека едното од множествата S_1 и S_2 го содржи другото, на пример $S_1\subset S_2$. Тогаш збировите σ_1 и σ_2 се разликуваат за двократниот збир на неколку броеви x_i, што значи за повеќе од два, па затоа не може и двата да припаѓаат на интервалот $[0,2]$. Значи, ако $\sigma_1, \sigma_2, ... \sigma_m$ се сите збирови од дадениот вид кои припаѓаат на интервалот $[0,2]$ и $S_1 \cup T_1, S_2 \cup T_2, ..., S_m \cup T_m$ се соодветните разбивања на множеството $\{1,2,...,2n\}$, тогаш множествата $S_1, S_2, ..., S_n$ се неспоредливи во однос на инклузијата, т.е. ниту едно од нив не се содржи во некое друго како подмножество. Конечно, ако се искористи третата задача од Малата олимпијада во 1978 заклучуваме дека $m \leq \binom{2n}{n}$.