XLIV олимпијада

1. Нека A е подмножество на множеството $S=\{1,2,...,1000000\}$, кое содржи точно 101 елемент. Докажи, дека постојат броеви $t_1,t_2,...,t_{100}\in S$ такви што множествата

$$A_i=\{x+t_i \mid x\in A\},\ i=1,2,...,100$$

се по паров дисјунктни.

Решение. Да го разгледаме множеството $D=\{x-y \mid x,y\in A\}$. Јасно, множеството D има најмногу $101\cdot 100+1$ елемент. Понатаму, множествата $A_i = t_i+A$ и $A_j=t_j+A$ се дисјунктни ако и само ако $t_i-t_j\notin D$. Бараните броеви $t_1,t_2,...,t_{100}$ ќе ги избереме индуктивно.

Прво, да земеме произволен број $t_1\in S\setminus D$. Нека претпоставиме дека сме одбрале $k\le 99$ броеви $t_1,t_2,...,t_k\in D$ такви што разликата на било кои два од овие броеви не припаѓа на множеството D. За t_{k+1} е доволно да се избере било кој број од S кој не припаѓа на множествата $t_1+D, t_2+D,...,t_k+D$. Последното може да се направи бидејќи за секој i важи $|t_i+D|\le 101\cdot 100+1$, па затоа

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}(t_i+D)\right|\le 99\cdot(101\cdot 100+1)=999999<1000000.$$

2. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ е природен број.

Решение. Нека $a^2=k(2ab^2-b^3+1), k\in\mathbb{N}$. Јасно, $2ab^2\ge b^3$, па затоа важи $b\le 2a$. Од друга страна, ако $b\ge a$, тогаш $b^2\ge a^2\ge b^2(2a-b)+1$, па затоа во овој случај мора да е $b=2a$.

За дадени вредности на b и k, бројот a е корен на квадратната равенка

$$x^2-2kb^2x+k(b^3-1)=0. \qquad (1)$$

Оваа равенка има две решенија $a_1,a_2\in\mathbb{N}_0$. Нека $a_1\ge a_2$. Од Виетовите правила имаме $a_1+a_2=2kb^2$, па затоа $a_1\ge kb^2$. Повторно од Виетовите правила следува

$$0\le a_2=\frac{k(b^3-1)}{a_1}\le\frac{k(b^3-1)}{kb^2}<b$$

и од претходно изнесеното добиваме дека мора да важи $b=2a_2$ или $a_2=0$.

Ако $a_2=0$, тогаш $b=1$ и $a_1=2k$. Ако $b=2a_2$, тогаш ако во (1) земеме

$x = a_2$ и $b = 2a_2$ добиваме $k = a_2^2$, па наоѓаме $a_1 = 2kb^2 - a_2 = 8a_2^4 - a_2$.
Конечно, од претходно изнесеното следува дека единствени решенија се

$$(a,b) \in \{(2t,1), (t,2t), (8t^4 - t, 2t) \mid t \in \mathbb{N}\}.$$

Непосредно се проверува дека овие парови навистина се решенија на задачата.

3. Даден е конвексен шестаголник кај за кои секои две спротивни страни важи: растојанито меѓу нивните средини е еднакво на збирот на нивните должини помножен со $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Докажи, дека сите агли на овој шестаголник се еднакви?
(Конвексен шестаголник $ABCDEF$ има три пара спротивни старни: AB и DE, BC и EF, CD и FA.)

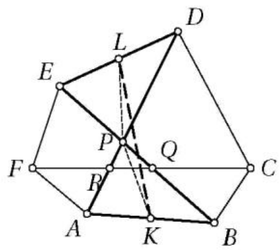
Решение. Нека $ABCDEF$ е дадениот шестаголник. Ќе го користиме следново тврдење.

Лема. Ако $\measuredangle XZY \geq 60^\circ$ и M е средина на отсечката XY, тогаш $\overline{MZ} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{XY}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $\triangle XYZ$ е рамностран.

Доказ. Нека Z' е точка таква што $\triangle XYZ'$ е рамностран и Z, Z' се на иста страна на правата XY. Тогаш Z е во внатрешноста на опишаната кружница околу $\triangle XYZ'$, па затоа $\overline{MZ} \leq \overline{MZ'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{XY}$. Јасно, зна за равенство важи ако и само ако $Z \equiv Z'$. ■

Да означиме

$$AD \cap BE = P,\ BE \cap CF = Q \text{ и } CF \cap AD = R.$$



Нека претпоставиме дека $\measuredangle APB = \measuredangle DPE > 60^\circ$. Тогаш, ако K и L се средини на отсечките AB и DE, соодветно, од лемата следува

$$\overline{KL} \leq \overline{PK} + \overline{PL} < \frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{AB} + \overline{DE}) = \overline{KL},$$

што е противречност. Според тоа, $\measuredangle APB \leq 60^\circ$.

Аналогно се докажува дека $\measuredangle BQC \leq 60^\circ$ и $\measuredangle CRD \leq 60^\circ$. Бидејќи

$$\measuredangle APB + \measuredangle BQC + \measuredangle CRD = 180^\circ,$$

заклучуваме дека

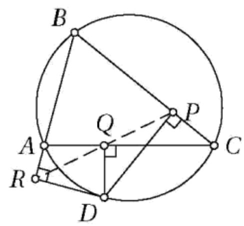
$$\measuredangle APB = \measuredangle BQC = \measuredangle CRD = 60^\circ$$

и уште повеќе триаголниците APB, BQC и CRD мора да бидат рамнострани. Следува дека $\measuredangle ABC = \measuredangle ABP + \measuredangle QBC = 120^\circ$.

Аналогно се докажува дека и останатите агли на шестаголникот се еднакви на 120°.

4. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека P,Q и R се подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите BC, CA и AB, соодветно. Докажи, дека $\overline{PQ}=\overline{QR}$ ако и само ако симетралите на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ се сечат на правата AC.

Решение. Ако симетралите на аглите $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ ја сечат отсечката AC во точките K и L, соодветно, тогаш важи



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}} \text{ и } \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{LC}},$$

па затоа $K\equiv L$ е еквивалентно со $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Од друга страна, точките P и Q лежат на кружницата со дијаметар CD, па затоа

$$\overline{PQ}=\overline{CD}\sin\measuredangle PCQ=\overline{CD}\sin\measuredangle ACB=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2r},$$

каде r е радиусот на кружницата $ABCD$. Слично, $\overline{QR}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}{2r}$, па и $\overline{PQ}=\overline{QR}$ е еквивалентно со $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$.

5. Нека n е природен број и $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви такви што $x_1\le x_2\le ...\le x_n$.

а) Докажи, дека

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2\le\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2 .$$

б) Докажи, дека знак за равенство важи ако и само ако $x_1,x_2,...,x_n$ е аритметичка прогресија.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на низите $|i-j|$ и $|x_i-x_j|$ следува

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\right)\ge\left(\sum_{i,j=1}^{n}|i-j|\cdot|x_i-x_j|\right)^2, \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако постои λ таков што $x_i-x_j=\lambda(i-j)$, што значи ако и само ако $\{x_i\}$ е аритметичка прогресија. Останува да ги средиме двете страни на (1). Лесно се докажува, на пример со индукција, дека

$$\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2=\frac{n^2(n^2-1)}{6} \text{ и } \sum_{i,j=1}^{n}|i-j|\cdot|x_i-x_j|=\frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j| .$$

Според тоа, неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$\frac{n^2(n^2-1)}{6}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\right)\geq\frac{n^2}{4}\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2,$$

кое е еквивалентно со даденото неравенство.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$, (секој број можеме да го транслатираме за $\alpha=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$). Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2&=\left(2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2\leq\left(4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\\&=\frac{4n(n^2-1)}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=\frac{4(n^2-1)}{3}\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\\&=\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.\end{aligned}$$

6. Даден е прост број p. Докажи, дека постои прост број q таков што за секој цел број n бројот n^p-p не е делив со q.

Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека за секој прост број q постои цел број n таков што $n^p\equiv p(\bmod q)$. Знаеме дека за $q\not\equiv 1(\bmod p)$ степените n^p ги даваат сите можни остатоци по модул q. Затоа бројот q ќе го побараме во облик $q=kp+1, k\in\mathbb{N}$. Бидејќи $p^k\equiv n^{kp}=n^{q-1}\equiv 1(\bmod q)$, добиваме дека $q\mid p^k-1$ за секој таков q.

Нека q е прост делител на бројот $N=\frac{p^p-1}{p-1}=p^{p-1}+p^{p-2}+...+p+1$. Бидејќи $q\nmid p-1$ од $N\equiv p\equiv 1(\bmod p-1)$, следува дека редот на бројот p по модул q е p, па навистина е $q=kp+1$ за некој k. Сега од $q\mid \mathrm{NZD}(p^k-1,p^p-1)$ следува дека $q\mid p^{\mathrm{NZD}(p,k)}-1$, па затоа $\mathrm{NZD}(p,k)>1$, т.е. $p\mid k$. Понатаму, од $q=kp+1$ и $p\mid k$ следува дека $q\equiv 1(\bmod p^2)$. Последното значи дека сите прости делители на бројот N се од видот p^2x+1, што не е можно бидејќи $N\not\equiv 1(\bmod p^2)$.

Втор начин. Ако $p=2$, тогаш $q=3$ ги има саканите својства.

Нека p е непарен. Да го разгледаме бројот $N=1+p+p^2+...+p^{p-1}$. Јасно, N е непарен и $N\equiv p+1(\bmod p^2)$. Според тоа, $N\not\equiv 1(\bmod p^2)$ и затоа N има

прост делител q за кој $q \not\equiv 1 (\operatorname{mod} p^2)$. Ќе докажеме дека q ги има саканите својства.
Бидејќи p не е делител на N , важи $q \neq p$. Освен тоа, ако претпоставиме дека q е делител на $p-1$, тогаш $N \equiv 1+1+...+1 = p (\operatorname{mod} q)$, т.е. q е делител на p , што не е можно. Значи, q не е делител на $p-1$. Уште да забележиме дека од равенството $(p-1)N = p^p - 1$ следува дека $p^p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$.
Нека претпоставиме дека $n^p \equiv p (\operatorname{mod} q)$ за некој природен број n . Од претходните разгледувања следува дека q не е делител на n и $n \not\equiv 1 (\operatorname{mod} q)$. Конгруенцијата $n^p \equiv p (\operatorname{mod} q)$ ја степенуваме на степен p и добиваме $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$.
Нека k е редот на n по модул q . Тогаш од малата теорема на Ферма следува дека k е делител на $q-1$, а од конгрунцијата $n^{p^2} \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ следува дека k е делител на p^2 . Од изборот на q следува дека $q-1$ не е делител на p^2 , поа затоа $k=1$ или $k=p$. Првото противречи на $n \not\equiv 1 (\operatorname{mod} q)$. Во вториот случја добиваме $n^p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$, од што заедно со $n^p \equiv p (\operatorname{mod} q)$ добиваме $p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$, што е противречност.