

Primjena AG-nejednakosti u trigonometriji

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. *Razmatraju se primjene AG-nejednakosti u trigonometriji, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *AG-nejednakost, trigonometrija*

Applications of AG inequality in trigonometry

Abstract. *Applications of AG-inequality in trigonometry are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *AG-inequality, trigonometry*

O primjeni AG-nejednakosti u planimetriji bilo je riječi u [5], dok je ovaj članak posvećen primjeni AG-nejednakosti u trigonometriji.

Zadatak 1. *Dokažite nejednakost*

$$\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 8$$

ako je $\sin x \cos x \neq 0$.

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}} = 2\sqrt{\frac{16}{16 \sin^4 x \cos^4 x}} \\ &= 2 \cdot 4\sqrt{\frac{1}{(2 \sin x \cos x)^4}} = 8\sqrt{\frac{1}{\sin^4 2x}} \\ &\geq 8, \end{aligned}$$

jer je $\sin^4 2x \leq 1$. Pri tome jednakost vrijedi onda i onda ako je $\sin^4 x = \cos^4 x = \frac{1}{4}$, tj. za $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Zadatak 2. Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom u vrhu C . Neka su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a α i β kutovi tog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2}.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta) \geq \sqrt{\sin \alpha \sin \beta},$$

odnosno

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \geq \sqrt{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Kako je $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \beta = \frac{b}{c}$, to gornja nejednakost prelazi u

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}},$$

odakle dobivamo

$$\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je trokut ABC jednakokračan pravokutan.

Zadatak 3. Dokažite da za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$7^7 \sin^4 \alpha \cos^{10} \alpha \leq 12500.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} 7^7 \sin^4 \alpha \cos^{10} \alpha &= 7^7 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\cos^2 \alpha}{5} \right)^5 \\ &\leq 7^7 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \cdot \left(\frac{\frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \alpha}{5} + \frac{\cos^2 \alpha}{5} + \frac{\cos^2 \alpha}{5} + \frac{\cos^2 \alpha}{5} + \frac{\cos^2 \alpha}{5}}{7} \right)^7 \\ &= 7^7 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{7} \right)^7 = 7^7 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \cdot \frac{1}{7^7} \\ &= 12500. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{\sin^2 \alpha}{2} = \frac{\cos^2 \alpha}{5}$ tj. onda i samo onda ako je $\alpha = \pm \arctg \sqrt{\frac{2}{5}} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 4. Dokažite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} 2^{\sin x} + 2^{\cos x} &\geq 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}} = 2\sqrt{2^{\sin x + \cos x}} \\ &= 2\sqrt{2^{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})}} \geq 2\sqrt{2^{-\sqrt{2}}} = 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\sin x = \cos x$ i $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1$, a to je onda i samo onda ako je $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 5. Neka su α i β šiljasti kutovi. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}} + 2 \geq 2.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \geq 2\sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}} = 2,$$

pa je

$$\sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}} + 2 \geq \sqrt{2+2} = 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, tj. (obzirom da su kutovi α i β šiljasti) onda i samo onda ako je $\alpha = \beta$.

Zadatak 6. Odredite minimalnu vrijednost izraza

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sqrt{2} \sin x},$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Rješenje. Pribrojnici su pozitivni pa možemo upotrijebiti AG-nejednakost:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} &= \sin^2 x + \frac{1}{2\sqrt{2} \sin x} + \frac{1}{2\sqrt{2} \sin x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2} \sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2} \sin x}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Minimalna vrijednost je $\frac{3}{2}$ i ona se dostiže za $\sin^2 x = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin x}$, tj. $\sin^3 x = \frac{1}{\sqrt{8}}$, odakle slijedi $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je $x = \frac{\pi}{4}$.

Zadatak 7. *Riješite jednadžbu*

$$2 \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Rješenje. Iz

$$-1 \leq \cos \frac{x^2 + x}{6} \leq 1$$

slijedi

$$0 \leq \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} \leq 1,$$

a onda i

$$0 \leq 2 \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} \leq 2.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $2^x = 2^{-x}$, tj. $x = 0$. Za $x = 0$ je

$$2 \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2 \cos^2 \frac{0^2 + 0}{6} = 2,$$

pa $x = 0$ jest rješenje jednažbe.

Zadatak 8. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Rješenje. Prema poučku o kosinusu je

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) - \frac{a^2}{2bc}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2,$$

to je

$$\cos \alpha \geq 1 - \frac{a^2}{2bc},$$

tj.

$$1 - \cos \alpha \leq \frac{a^2}{2bc}.$$

Odatle dobivamo

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a^2}{2bc},$$

tj.

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Analogno,

$$\sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Stoga je

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{abc}{abc} = \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b = c$ tj. onda i samo onda ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 9. *Neka su α, β, γ kutovi šiljastokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \gamma \geq 3\sqrt{3^n}.$$

Rješenje. Dokažimo najprije da je $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$. Iz $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ dobivamo

$$\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

odakle je

$$\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta,$$

tj.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma},$$

pa je

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma},$$

odakle dobivamo

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \geq \sqrt{3^3}.$$

Dalje, prema AG-nejednakosti je

$$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^n \alpha \cdot \operatorname{tg}^n \beta \cdot \operatorname{tg}^n \gamma} \geq 3\sqrt[3]{(\sqrt{3^3})^n} = 3\sqrt{3^n}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$, a to je onda i samo onda ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 10. *Neka su $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 8$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \geq \frac{289}{8}.$$

Rješenje. Kako je $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ i $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$, nejednakost je ekvivalentna redom s

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 &\geq \frac{289}{8}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} + \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} &\geq \frac{289}{8}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} &\geq \frac{289}{8}, \\ (\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta) \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \right)^2 &\geq \frac{289}{8}. \end{aligned}$$

Prema KA-nejednakosti je

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}{2}} \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2},$$

odakle slijedi

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta \geq 32,$$

a prema AG-nejednakosti je

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} \geq \sqrt{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

a odatle je

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \geq \frac{1}{16}.$$

Stoga je

$$(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta) \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \right)^2 \geq 32 \cdot \left(1 + \frac{1}{16} \right)^2 = \frac{289}{8}.$$

Zadatak 11. Neka su a , b , c duljine stranica trokuta ABC i neka je b aritmetička sredina a i c . Dokažite da je tada $\beta \leq \frac{\pi}{3}$.

Rješenje. Iz danog uvjeta je $b = \frac{1}{2}(a + c)$. Prema poučku o kosinusu je

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \left(\frac{1}{2}(a + c)\right)^2}{2ac} = \frac{3}{8} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) - \frac{1}{4}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$, to je $\cos \beta \geq \frac{3}{8} \cdot 2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, odakle slijedi $\beta \leq \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 12. Oko kružnice je opisan trapez. Ako su e i f duljine dijagonala trapeza, a r polumjer kružnice, dokažite da vrijedi nejednakost

$$e^2 + f^2 \geq 16r^2.$$

Rješenje. Neka su a i c duljine osnovica trapeza, b i d duljine krakova, a α kut između dijagonala. Kako je trapez tangencijalan, to vrijedi

$$a + c = b + d > 4r. \quad (1)$$

Kako je $|\sin \alpha| \leq 1$, to je $2ef \geq 2ef \sin \alpha$. Prema AG-nejednakosti je $e^2 + f^2 \geq 2ef$, pa je $e^2 + f^2 \geq 2ef \sin \alpha$, tj.

$$e^2 + f^2 \geq 4P, \quad (2)$$

gdje je P površina trapeza. S druge strane je

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot 2r = (a+c)r, \quad (3)$$

pa iz (2) i (3) slijedi

$$e^2 + f^2 \geq 4r(a+c).$$

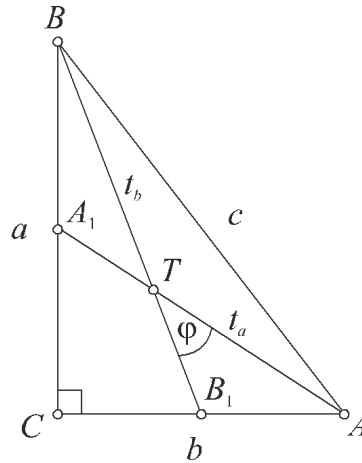
Dalje je, zbog (1),

$$e^2 + f^2 \geq 4r \cdot 4r = 16r^2.$$

Zadatak 13. Neka su u pravokutnom trokutu ABC , a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a t_a i t_b duljine težišnica povučenih iz vrhova A i B , redom. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\angle(t_a, t_b) \geq \frac{4}{5}.$$

Rješenje.



Slika 1.

Označimo $\sphericalangle(t_a, t_b) = \varphi$. Neka su A_1 i B_1 polovišta kateta $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, redom. Primijenimo Pitagorin poučak na trokute AA_1C i B_1BC :

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Odatle dobivamo

$$a^2 = \frac{16t_b^2 - 4t_a^2}{15}.$$

Primijenimo poučak o kosinusu na trokut B_1AT :

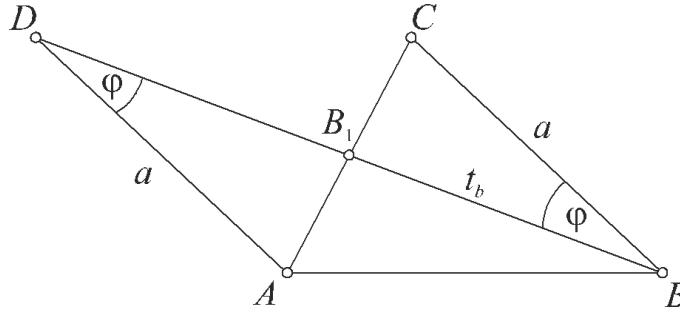
$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\left(\frac{1}{3}t_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{3}t_b \cdot \frac{2}{3}t_a} = \frac{\frac{1}{9}t_b^2 + \frac{4}{9}t_a^2 - t_b^2 + a^2}{\frac{4}{9}t_a t_b} \\ &= \frac{\frac{1}{9}t_b^2 + \frac{4}{9}t_a^2 - t_b^2 + \frac{16t_b^2 - 4t_a^2}{15}}{\frac{4}{9}t_a t_b} = \frac{\frac{8}{45}(t_a^2 + t_b^2)}{\frac{4}{9}t_a t_b} \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{t_a^2 + t_b^2}{2t_a t_b} \geq \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

jer je prema AG-nejednakosti $t_a^2 + t_b^2 \geq 2t_a t_b$ tj. $\frac{t_a^2 + t_b^2}{2t_a t_b} \geq 1$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $t_a = t_b$, tj. onda i samo onda ako je pravokutni trokut ABC jednakokračan.

Zadatak 14. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC . Težišnica $\overline{BB_1}$ zatvara sa stranicom $\overline{BC}$ kut φ . Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{ctg} \sphericalangle CAB \geq \frac{2\sqrt{2} - 3 \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Rješenje. Neka je točka B_1 polovište dužine $\overline{AC}$. Konstruirajmo točku D centralno simetričnu točki B obzirom na točku B_1 kao centar simetrije. Tada su trokuti AB_1D i CB_1B sukladni prema S-K-S teoremu, pa je $\sphericalangle ADB_1 = \sphericalangle CBB_1 = \varphi$.



Slika 2.

Neka je $|BC| = a$, $|BB_1| = t_b$. Prema poučku o kosinusu, iz trokuta ABD i AB_1D nalazimo

$$|AB|^2 = a^2 + 4t_b^2 - 4at_b \cos \varphi,$$

$$|AB_1|^2 = a^2 + t_b^2 - 2at_b \cos \varphi.$$

Iz trokuta ABB_1 je

$$\cos \sphericalangle CAB = \frac{|AB|^2 + |AB_1|^2 - |BB_1|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AB_1|}.$$

Dijeljenjem sa $\sin \sphericalangle CAB$ dobivamo

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \sphericalangle CAB &= \frac{a^2 + 4t_b^2 - 4at_b \cos \varphi + a^2 + t_b^2 - 2at_b \cos \varphi - t_b^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AB_1| \cdot \sin \sphericalangle CAB} \\ &= \frac{2a^2 + 4t_b^2 - 6at_b \cos \varphi}{2 \cdot 2P(ABB_1)} = \frac{2a^2 + 4t_b^2 - 6at_b \cos \varphi}{2 \cdot 2P(BCB_1)} \\ &= \frac{2a^2 + 4t_b^2 - 6at_b \cos \varphi}{2at_b \sin \varphi} = \frac{a^2 + 2t_b^2 - 3at_b \cos \varphi}{at_b \sin \varphi} \\ &= \frac{a}{t_b \sin \varphi} + \frac{2t_b}{a \sin \varphi} - 3 \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{a}{t_b \sin \varphi} + \frac{2t_b}{a \sin \varphi} \geq 2\sqrt{\frac{a}{t_b \sin \varphi} \cdot \frac{2t_b}{a \sin \varphi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin \varphi},$$

pa je

$$\operatorname{ctg} \sphericalangle CAB \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sin \varphi} - 3 \operatorname{ctg} \varphi = \frac{2\sqrt{2} - 3 \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{a}{t_b \sin \varphi} = \frac{2t_b}{a \sin \varphi}$, tj. onda i samo onda ako je $t_b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Zadatak 15. Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma} - \sqrt{\sin \alpha}} + \frac{\sqrt{\sin \beta}}{\sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \gamma} - \sqrt{\sin \beta}} \\ + \frac{\sqrt{\sin \gamma}}{\sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \beta} - \sqrt{\sin \gamma}} \geq 3. \end{aligned}$$

Rješenje. Označimo

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma} - \sqrt{\sin \alpha} &= x, \\ \sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \gamma} - \sqrt{\sin \beta} &= y, \\ \sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \beta} - \sqrt{\sin \gamma} &= z. \end{aligned}$$

Dokažimo najprije da su brojevi x, y, z pozitivni. Kako je

$$\begin{aligned} (\sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma})^2 &> \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \\ &> 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \end{aligned}$$

(zbog $|\beta - \gamma| < \beta + \gamma < \pi$), to je $\sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma} > \sqrt{\sin \alpha}$, tj. $x > 0$. Analogno dobivamo da je $y > 0$ i $z > 0$.

Označimo lijevu stranu nejednakosti koju treba dokazati sa A i primijenimo AG-nejednakost:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{y+z}{2}}{x} + \frac{\frac{x+z}{2}}{y} + \frac{\frac{x+y}{2}}{z} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 3. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda kada je $x = y = z$ što se svodi na $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$, tj. $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 16. *Dokažite da za trokut ABC vrijedi $R > 2r$, gdje je R polumjer trokutu ABC opisane kružnice, a r polumjer tom trokutu upisane kružnice.*

Rješenje. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC , α, β, γ redom njihovi nasuprotni kutovi, a P površina trokuta ABC . Kako je $2P = r(a + b + c)$ i $2P = ab \sin \gamma$, to je

$$r(a + b + c) = ab \sin \gamma.$$

Obzirom da je $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin \gamma$, dalje imamo redom

$$r(2R \sin \alpha + 2R \sin \beta + 2R \sin \gamma) = 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma,$$

$$r = \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \cdot 2R.$$

Kako je $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma > 0$, jer su $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi \rangle$, to možemo rabiti AG-nejednakost:

$$\begin{aligned} r &= \frac{(\sqrt[3]{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma})^3}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \cdot 2R \\ &\leq \frac{\left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^3}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \cdot 2R \\ &= \frac{2R}{27} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 \\ &= \frac{2R}{3} \cdot \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Kako je funkcija $x \mapsto \sin x$ Jensen-konkavna (vidjeti [4]), vrijedi

$$\left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^2 \leq \sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right),$$

pa je

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{2R}{3} \sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) \\ &= \frac{2R}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

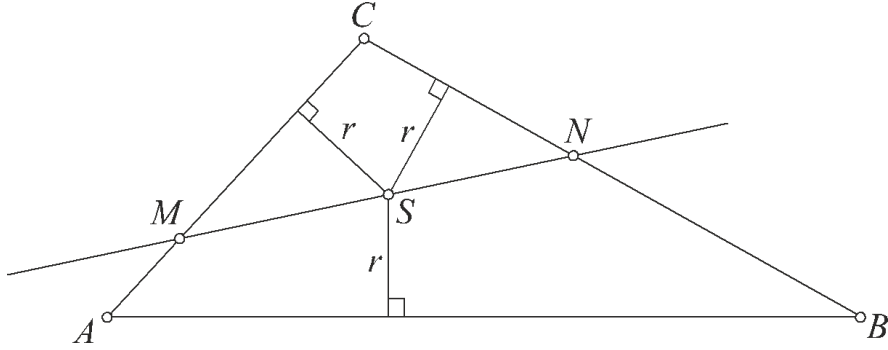
Dakle, $2r \leq R$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 17. Neka je r polumjer, a S središte kružnice upisane trokutu ABC . Neka sekanta kružnice koja prolazi točkom S siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki M , a stranicu $\overline{BC}$ u točki N . Dokažite da vrijedi

$$P(MNC) \geq 2r^2.$$

Rješenje. Označimo sa P_1 površinu trokuta MNC . Vrijedi

$$\begin{aligned} P_1 &= P(MSC) + P(SNC) \\ &= \frac{1}{2}|CM| \cdot r + \frac{1}{2}|CN| \cdot r \\ &= \frac{1}{2}r(|CM| + |CN|). \end{aligned}$$



Slika 3.

Prema AG-nejednakosti je

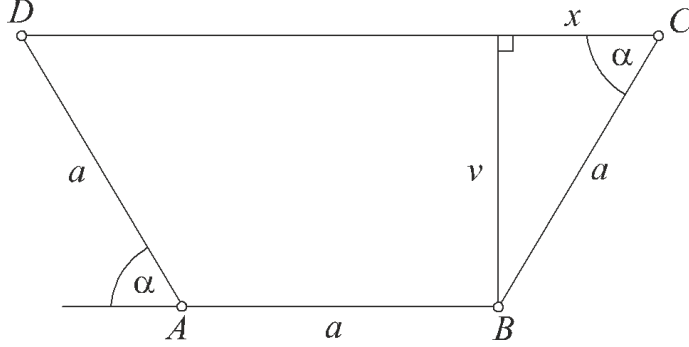
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|CM| + |CN|) &\geq \sqrt{|CM| \cdot |CN|} \\ &\geq \sqrt{|CM| \cdot |CN| \cdot \sin \angle BCA} = \sqrt{2P_1}. \end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$P_1 = r \cdot \frac{1}{2}(|CM| + |CN|) \geq r \cdot \sqrt{2P_1},$$

tj. $P_1^2 \geq r^2 \cdot 2P_1$, pa je $P_1 \geq 2r^2$.

Zadatak 18. Presjek kanala je jednakokračan trapez kome osnovica i krak imaju duljinu a , a kut pri vrhu kanala je α . Koji presjek ima najmanju površinu? Rješenje.



Slika 4.

Neka su oznake kao na slici. Vidimo da je $v = a \sin \alpha$ i $x = a \cos \alpha$. Slijedi $c = a + 2a \cos \alpha$, pa imamo

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{a+a+2a \cos \alpha}{2} \cdot a \sin \alpha = (1 + \cos \alpha) a^2 \sin \alpha.$$

Odatle je

$$\begin{aligned} P^2 &= (1 + \cos \alpha)^2 a^4 \sin^2 \alpha = (1 + \cos \alpha)^2 a^4 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= (1 + \cos \alpha)^3 a^4 (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{3} a^4 (1 + \cos \alpha)^3 (3 - 3 \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{3} a^4 (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)(3 - 3 \cos \alpha). \end{aligned}$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} a^4 (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)(3 - 3 \cos \alpha) \\ &\leq \frac{1}{3} a^4 \cdot \left(\frac{1 + \cos \alpha + 1 + \cos \alpha + 1 + \cos \alpha + 3 - 3 \cos \alpha}{4} \right)^4 \\ &= \frac{1}{3} a^4 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{27}{16} a^4, \end{aligned}$$

to je $P \leq \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $1 + \cos \alpha = 3 - 3 \cos \alpha$, tj. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, odnosno $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 19. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a P njegova površina. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P.$$

Rješenje. Iz očigledne nejednakosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ dobivamo $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2P \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \right).$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}}.$$

Dokažimo sada da je $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Prema 8. zadatku,

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8},$$

a u [4] je dokazano da je

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= 8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ &\leq 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \geq 2\sqrt{3}.$$

Dakle,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2P \cdot 2\sqrt{3} = 4P\sqrt{3}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda kada je $a = b = c$.

Zadaci za vježbu

1. Odredite minimalnu vrijednost funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x \cos x}$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Rez. $f_{\min}(x) = 2\sqrt{2} + 2$ za $x = \frac{\pi}{4}$.

2. Odredite minimalnu vrijednost funkcije

$$f(x) = \sin^2 x (2 - 2 \sin x)$$

za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Rez. $f_{\min}(x) = \frac{8}{27}$ za $x = \arcsin \frac{2}{3}$.

3. Odredite minimalnu vrijednost funkcije

$$f(x) = \cos^2 x (2 - 2 \cos x)$$

za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Rez. $f_{\min}(x) = \frac{8}{27}$ za $x = \arccos \frac{2}{3}$.

4. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC , a P njegova površina. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}P.$$

5. Neka su u trokutu ABC , a, b i c duljine stranica, a t_c duljina težišnice povučene iz vrha C i neka vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t_c}.$$

Dokažite da je tada $\sphericalangle BCA \geq \frac{2\pi}{3}$.

6. Riješite jednadžbu

$$2 \cos^2 \frac{x^2 + 3y}{6} = 3^x + 3^{-x}.$$

Rez. $(x, y) = (0, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

7. Neka su α, β i γ kutovi trokuta, a n prirodni broj. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\gamma}{2} \geq 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Literatura

- [1] G. BARTHA, P. KUN, *Válogatott fejezetek a matematikából*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [2] J. CARSTENSEN, A. MUMINAGIĆ, *Matematiske juveler*, Frederiksberg Bogtrykkeri, Frederik, 2006.
- [3] J. CARSTENSEN, A. MUMINAGIĆ, *Matematiske miniaturer*, Frederiksberg Bogtrykkeri, Frederik, 2004.
- [4] I. ILIŠEVIĆ, *Jensenova nejednakost*, Osječki matematički list **5**(1) (2005), 9–19.
- [5] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena AG-nejednakosti u planimetriji*, Osječki matematički list **9**(2) (2009), 55–68.
- [6] S. KATZ, *Matematika feladatsorok*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.
- [7] B. PAVKOVIĆ, D. SVRTAN, D. VELJAN, *Matematika, zbirka zadataka za treći razred srednjeg usmjerenog obrazovanja*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.