Републички натпревар 2018

I година

1. За кои цифри x, y, z е точно равенството
$$\overline{xy}\sqrt{\overline{yx}}+\overline{yz}\sqrt{\overline{zy}}=\overline{(x+z)xy}\,?$$

Решение. Бидејќи $\overline{yx}$ и $\overline{zy}$ мора да се точни квадрати, заклучуваме дека тие се меѓу броевите 16, 25, 36, 49, 64 или 81. Но, y треба истовремено да се јавува и како прва и како втора цифра на некој од дадените двоцифрени броеви, па затоа $y\in\{1,4,6\}$. Сега лесно се добива дека $x\in\{6,9,4\}$ и $z\in\{3,6,8\}$. Понатаму, $x+z$ треба да е цифра, па затоа $x+z\le 9$, што е можно само ако дека $z=3$ и $x\in\{6,4\}$. Понатаму, од $z=3$ следува $y=6$, па добиваме дека $x=4$. Навистина
$$46\sqrt{64}+63\sqrt{36}=746\,.$$

2. Сад е наполнет со стопроцентен алкохол. Од садот се одлеани два литра алкохол и е додадена исто толку дестилирана вода. Постапката е повторена уште еднаш, односно, одлеани се два литра од растворот и додадени два литра дестилирана вода. На тој начин во садот е добиен 36 % алкохол. Колку литри раствор содржи садот?

Решение. Нека во садот на почеток има x литри алкохол, колку што е и вкупното количество на раствор во садот. Кога од садот ќе одлееме 2 литри алкохол и дотуриме 2 литри вода, во садот ќе има $x-2$ литри чист алкохол, односно $\frac{100(x-2)}{x}$ процентен алкохол. Вкупното количество на чист алкохол после второто претурање е $x-2-2\cdot\frac{x-2}{x}$ литри, а тоа според условот на задачата е $0,36x$. Така се добива равенката
$$x-2-2\cdot\frac{x-2}{x}=0,36x\,.$$
После множењето со x добиваме
$$x^2-2x-2\cdot(x-2)=0,36x^2$$
$$x(x-2)-2(x-2)=0,36x^2$$
$$(x-2)^2=(0,6x)^2.$$
Работиме со позитивни величини, од каде имаме дека
$$x-2=0,6x$$
$$0,4x=2\qquad .$$
$$x=5$$
Значи, садот содржи 5 литри раствор.

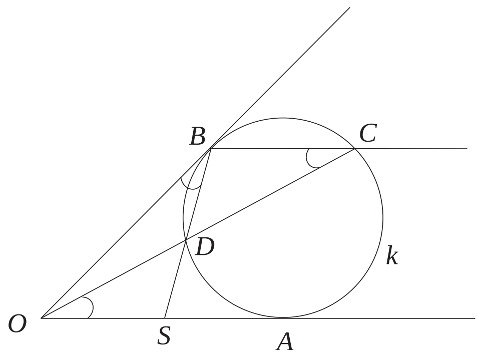
3. Нека a,b,c се природни броеви такви што броевите $p=b^c+a, q=a^b+c$ и $r=c^a+b$ се прости. Докажи дека два од простите броеви се еднакви.

Решение. Од принципот на Дирихле следува дека два од броевите a,b,c се со иста парност. Без губење на општоста можеме да земеме дека a и b се со иста парност. Тогаш $p=b^c+a$ е парен број, па затоа $p=2$. Понатаму, од $2=b^c+a$ следува дека $a=1$ и $b=1$. Според тоа, $q=a^b+c=1+c=c^1+1=c^a+b=r$, што и требаше да се докаже.

4. Кружница k ги допира краците на агол со теме O, во точките A и B. Правата која минува низ B и е паралелна со кракот OA ја сече кружницата во точката C, а отсечката OC ја сече кружницата во точката D.

Докажи дека правата BD минува низ средината на отсечката OA.

Решение. Ќе докажеме дека $\triangle OBS \sim \triangle DOS$ (види цртеж). Имаме, $\measuredangle OBS = \measuredangle BCD$ како агли меѓу тангента и тетива. Понатаму, $\measuredangle BCD = \measuredangle DOS$ како наизменични агли. Значи $\measuredangle OBS = \measuredangle DOS$, а аголот кај темето S е заеднички, па затоа важи $\triangle OBS \sim \triangle DOS$. Сега $\overline{OS}:\overline{SB}=\overline{DS}:\overline{SO}$, т.е. $\overline{OS}^2=\overline{SB}\cdot\overline{DS}$. Од друга страна од степен на точката S во однос на кружницата k следува $\overline{SA}^2=\overline{SB}\cdot\overline{SD}$. Затоа $\overline{OS}^2=\overline{SA}^2$, т.е. $\overline{SA}=\overline{OS}$, што значи дека точката S е средина на отсечката OA.



II година

1. За која вредност на параметарот p корените на квадратната равенка

$$x^2+(p-3)x-p+2=0$$

се реални и со различен знак.

Решение. Дискриминантата е

$$D=p^2-6p+9+4p-8=p^2-2p+1=(p-1)^2\geq 0,$$

за секој реален број p. Бидејќи корените треба да се реални и со различен знак добиваме дека $(p-1)^2>0$, а тоа е исполнето за $p\neq 1$. Од друга страна корените на равенката се со различен знак па важи

$$x_1x_2=-p+2<0 \quad\Leftrightarrow\quad -p+2<0 \quad\Leftrightarrow\quad p>2.$$

Конечно, $p \in (2, \infty)$.

2. Определи ги сите природни броеви n за кои $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ е прост број.

Решение. Имаме

$$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = 3 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 2^{2n} - 3^n \cdot 2^n = 3 \cdot (3^n)^2 - 2 \cdot (2^n)^2 - 3^n \cdot 2^n$$

Воведуваме замена $3^n = a$ и $2^n = b$, и добиваме

$$3a^2 - 2b^2 - ab = 3a^2 - 3ab + 2ab - 2b^2 = 3a(a-b) + 2b(a-b) = (a-b)(3a+2b).$$

Значи, $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1})$. За $n \geq 2$ важи $3^n - 2^n > 1$, па затоа $(3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1})$ е сложен број. За $n = 1$ имаме $(3-2)(3^2 + 2^2) = 13$, што значи дека $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ е прост број само за $n = 1$.

3. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

Решение. Првата равенка ја множиме со y, втората ја множиме со x и добиените равенки ги собираме, после што добиваме

$$xy + \frac{3xy - y^2}{x^2+y^2} + xy - \frac{x^2+3xy}{x^2+y^2} = 3y, \text{ т.е. } 2xy - 1 = 3y.$$

Бидејќи $y \neq 0$, добиваме $x = \frac{3y+1}{2y}$. Ако замениме во втората равенка, последователно добиваме

$$y - \frac{\frac{3y+1}{2y} + 3y}{(\frac{3y+1}{2y})^2 + y^2} = 0$$

$$y - \frac{2y(6y^2+3y+1)}{9y^2+6y+1+4y^4} = 0$$

$$4y^4 + 9y^2 + 6y + 1 - 12y^2 - 6y - 2 = 0$$

$$4y^4 - 3y^2 - 1 = 0$$

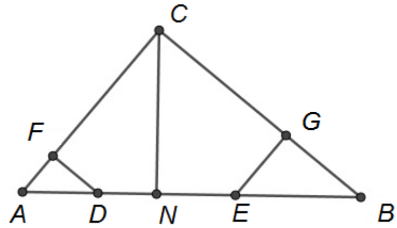
Нека $t = y^2$. Тогаш решенија на квадратната равенка $4t^2 - 3t - 1 = 0$ се $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{4}$. Бидејќи системот треба да се реши во множеството реални броеви добиваме $y^2 = 1$, од каде наоѓаме $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Со замена во $x = \frac{3y+1}{2y}$ добиваме $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Кнечно, бараните решенија на системот се $(2,1)$ и $(1,-1)$.

4. Даден правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека D и E се точки од хипотенузата AB такви што $\overline{BC}=\overline{BD}$ и $\overline{AC}=\overline{AE}$. Нека F е ортогонална проекција на точката D врз страната AC, а G е ортогоналната проекција на точката E врз страната BC. Докажи дека $\overline{DE}=\overline{DF}+\overline{EG}$.

Решение. Нека N е подножјето на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB. Од $\overline{BC}=\overline{BD}$ следува

$$\measuredangle BCD=\measuredangle BDC.$$



Тогаш од

$\measuredangle BCD=\measuredangle BCN+\measuredangle NCD$ и

$\measuredangle BDC=\measuredangle DCA+\measuredangle DAC$

следува

$$\measuredangle BCN+\measuredangle NCD=\measuredangle DCA+\measuredangle DAC. \qquad (1)$$

Од $FD \parallel BC$ следува $\measuredangle ADF=\measuredangle DBC$ (трансферзални агли). Од $\measuredangle AFD=\measuredangle CND=90^\circ$ следува

$$\measuredangle DAC=\measuredangle DAF=\measuredangle BCN \qquad (2)$$

Со замена на (2) во (1) добиваме

$$\measuredangle BCN+\measuredangle NCD=\measuredangle DCA+\measuredangle BCN \text{ т.е. } \measuredangle NCD=\measuredangle DCA.$$

Следува CD е симетрала на $\measuredangle FCN$ и затоа D е еднакво оддалечена од краците на аголот, односно $\overline{FD}=\overline{DN}$. Аналогно се покажува дека $\overline{NE}=\overline{EG}$. Конечно,

$$\overline{DE}=\overline{DN}+\overline{NE}=\overline{DF}+\overline{EG}.$$

III година

1. Реши ја неравенката

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1.$$

Решение. Разгледуваме два случаи:

а) $3-x>1 \wedge \frac{3x-5}{3-x}<0$;

(б) $0<3-x<1 \wedge \frac{3x-5}{3-x}>0$.

Оттука добиваме:

(а) $x<2 \wedge 3x-5<0$, т.е. $x\in(-\infty,\frac{5}{3})$;

(б) $2<x<3 \wedge 3x-5>0$, т.е $x\in(2,3)$.

Значи решение на неравенката е $x\in(-\infty,\frac{5}{3})\cup(2,3)$.

2. Ако важи равенството

$$\log_a b-\log_{ab} b=\log_{ab^2} b-\log_{ab^3} b,$$

определи ги $\log_a b, \log_{ab} b, \log_{ab^2} b$ и $\log_{ab^3} b$.

Решение. За $b=1$, сите логаритми се еднакви на 0.

За $b>0$ и $b\neq 1$, дадениот услов можеме да го запишеме во обликот

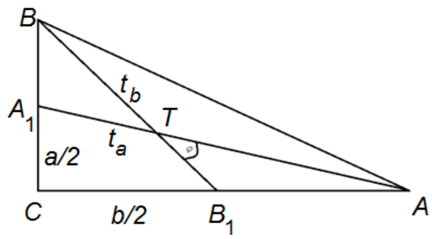
$$\frac{1}{\log_b a}-\frac{1}{\log_b a+1}=\frac{1}{\log_b a+2}-\frac{1}{\log_b a+3}.$$

Нека $\log_b a = x$. Тогаш ја добиваме равенката $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$, чие решение е $x=-\frac{3}{2}$. Затоа, $\log_a b=-\frac{2}{3}$, $\log_{ab} b=-2$, $\log_{ab^2} b=2$ и $\log_{ab^3} b=\frac{2}{3}$.

3. Докажи дека за аголот φ меѓу тежишните линии повлечени кон катетите на правоаголен триаголник важи неравенството $\cos\varphi \geq \frac{4}{5}$.

Решение. Нека A_1 е средината на катетата a, B_1 е средината на катетата b и нека t_a и t_b се тежишни линии повлечени кон катетите a и b, соодветно. Од правоаголните триаголници AA_1C и BCB_1, според Питагоровата теорема, имаме $t_a^2=\frac{a^2}{4}+b^2$ и $t_b^2=a^2+\frac{b^2}{4}$, од каде што елиминирајќи го b добиваме

$$a^2=\frac{16t_b^2-4t_a^2}{15} \qquad (1)$$



Од косинусната теоремата за триаголникот A_1TB имаме

$$\overline{A_1B}^2=\overline{A_1T}^2+\overline{TB}^2-2\overline{A_1T}\cdot\overline{TB}\cos\varphi$$

и оттука следува дека

$$\cos\varphi=\frac{(\frac{1}{3}t_a)^2+(\frac{2}{3}t_b)^2-(\frac{a}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{3}t_a\frac{2}{3}t_b}.$$

Ако во последното равенство го замениме a^2 со изразот во (1), добиваме

$$\cos\varphi=\frac{2}{5}\frac{t_a^2+t_b^2}{t_at_b} \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $t_a^2+t_b^2\geq 2t_at_b$, односно $\frac{t_a^2+t_b^2}{t_at_b}\geq 2$, па сега од (2) следува

$$\cos\varphi=\frac{2}{5}\frac{t_a^2+t_b^2}{t_at_b}\geq 2\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{5},$$

што и требаше да се докаже.

4. Докажи го неравенството

$$\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x\leq 2.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x &\le \sin^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x\\ &= 2\sin^4 x+(1-\sin^2 x)^2\\ &= 3\sin^4 x-2\sin^2 x+1\\ &= 3(\sin^2 x-\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}\\ &\le 3(1-\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}=2\end{aligned}$$

За да важи равенство, треба секаде да имаме равенства, односно мора да важи

$$\sin^5 x=\sin^4 x,\ \cos^5 x=\cos^4 x,\ \sin^2 x=1.$$

Од $\sin^4 x(\sin x-1)=0 \wedge \sin^2 x=1$ следува дека $\sin x=1$. Значи, равенството важи ако и само ако $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

IV година

1. Нека $a_{m+n}=A$ и $a_{m-n}=B$ се членови на аритметичка прогресија. Изрази ги членовите a_n и a_m преку A и B.

Решение. Од

$$a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d=A$$

и

$$a_{m-n}=a_1+(m-n-1)d=B$$

добиваме

$$a_m+nd=A \text{ и } a_m-nd=B,$$

односно $d=\frac{A-B}{2n}$. Сега од $a_m-nd=B$ и $a_n+md=A$ следува

$$a_m=B+nd=B+n\frac{A-B}{2n}=\frac{A+B}{2} \text{ и } a_n=A-md=A-m\frac{A-B}{2n}=\frac{(2n-m)A+mB}{2n}.$$

2. Дадена е низа од $2n+1$ броеви таква што секој член на низата е или 1 или -1. Дали може дадените броеви од низата да се поделат на две групи (секој член на низата припаѓа само на една група) така што збирот на броевите од едната група е еднаков со збирот на броевите од другата група.

Решение. Бидејќи $2n+1$ е непарен број, во едната група треба да има непарен број броеви $(2k+1)$, а во другата парен $(2n+1-(2k+1)=2(n-k))$. Бидејќи броевите се 1 или -1, збир на еден пар броеви е -2, 0 или 2. Според тоа, збирот на елементите во групата со парен број на елементи е парен. Од друга страна, во другата група збирот од $2k$ елементи е парен, а со додавање на останатиот се добива непарен број. Бидејќи не постои број кој е истовремено парен и непарен, таква поделба не постои.

3. Параболите $y=-x^2+bx+c$, $b,c\in\mathbb{R}$ ја допираат параболата $y=x^2$. Определи ја равенката на кривата на која лежат темињата на параболите $y=-x^2+bx+c$.

Решение. Нека параболите $y=-x^2+bx+c$ и $y=x^2$ меѓусебно се допираат. Тогаш равенката $-x^2+bx+c=x^2$ има едно решение. Равенката $2x^2-bx-c=0$ има едно решение, т.е. има двоен корен ако и само ако $b^2+8c=0$. Според тоа параболите се допираат ако и само ако $c=-\frac{b^2}{8}$, т.е. ако и само ако параболата $y=-x^2+bx+c$ е од видот $y=-x^2+bx-\frac{b^2}{8}$. Нејзино теме е $T(\frac{b}{2},\frac{b^2}{8})$. Бидејќи $\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, добиваме дека темињата на параболите се наоѓаат на параболата $\frac{b}{2}\mapsto\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, т.е. $y=\frac{1}{2}x^2$.

4. Нека $x_1,x_2,...,x_9$ се ненегативни реални броеви за кои важи

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2\ge 25.$$

Докажи дека меѓу броевите $x_1,x_2,...,x_9$ може да се најдат три броја чиј збир е поголем или еднаков од 5.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$x_1\ge x_2\ge x_3\ge x_4\ge x_5\ge x_6\ge x_7\ge x_8\ge x_9\ge 0.$$

Тогаш имаме: $x_1x_2\ge x_4^2\ge x_5^2$, $x_1x_3\ge x_6^2\ge x_7^2$ и $x_2x_3\ge x_8^2\ge x_9^2$, па затоа

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\\&\ge x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_9^2\ge 25,\end{aligned}$$

т.е. $x_1+x_2+x_3\ge 5$.