Љубица Киселички (Суботица)

О ИНВЕРЗИЈИ И ЈЕДНОМ АПОЛОНИЈЕВОМ ЗАДАТКУ

Од конструктивних геометријских задатака који се могу решити помоћу лењира и шестара, један од најинтересантнијих је задатак познатог старогрчког математичара Аполонија из Перга. Он гласи:

Конструисати кружницу која додирује три дате кружнице.

Зна се да је решење тог задатка било у делу „О тангентама", но то је Аполонијево дело касније изгубљено. Међутим значај тог задатка је у томе да је иницирао многобројна математичка истраживања и њиме су се бавили и такве математичке величине попут Ојлера и Ламберта. Циљ овог чланка је не да прикажемо начине како се овај задатак може решити; већ да се читаоци упознају са методом инверзије коришћеном у једном од решења.

Нека је дата кружница полупречника r са центром O. Инверзија у односу на ову кружницу је трансформација равни, при којој се свакој тачки те равни, различитој од тачке O, додељује тачка M' на правој OM, која је од тачке O на растојању $\frac{r^2}{OM}$.

Тачка O зове се центар инверзије, а r^2 је степен или коефицијент инверзије.

Инверзију је 1830. године дефинисао немачки математичар Магнус, али се она јавља и у радовима самог Аполонија. Размотримо сада својства инверзије:

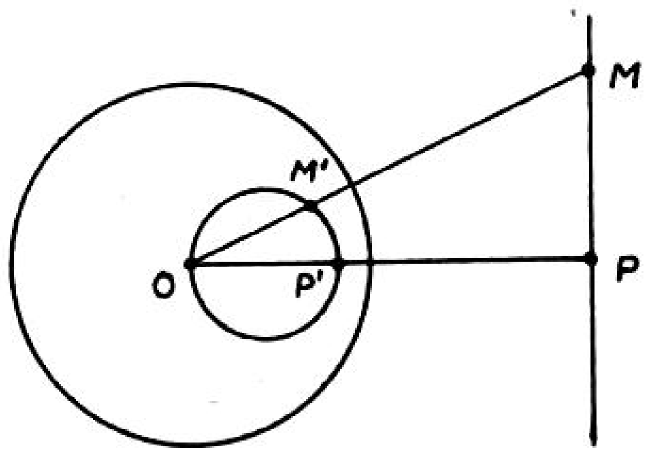
1. Тачке на одабраној кружници, чији је центар O — центар инверзије, се при инверзији пресликавају у саме себе; тачке унутар кружнице (осим тачке O) се пресликавају у спољашње тачке, а спољашње у унутрашње.

2. Ако се при инверзији фигура F пресликава у фигуру F', тада се и фигура F' пресликава у фигуру F.

3. При инверзији тачке праве која садржи центар инверзије прелазе у тачке те исте праве.

Приметимо да инверзија не дефинише пресликавање тачке O, но ако би раван допунили бесконачно далеком тачком P, могли би рећи да се при инверзији тачка O пресликава у тачку P, а тачка P пресликава се у тачку O.

4. Права која не садржи центар инверзије прелази у кружницу која садржи центар инверзије.



Сл. 1

Доказаћемо управо формулисано четврто својство инверзије. Нека је P подножје нормале из тачке O на дату праву p. Одредимо тачку P' инверзну тачки P. Нека је сада M произвољна тачка праве p, а M' њена инверзна тачка. На основу дефиниције инверзије добијамо да важе следеће једнакости

$$OP' = \frac{r^2}{OP}, \qquad OM' = \frac{r^2}{OM}. \tag{1}$$

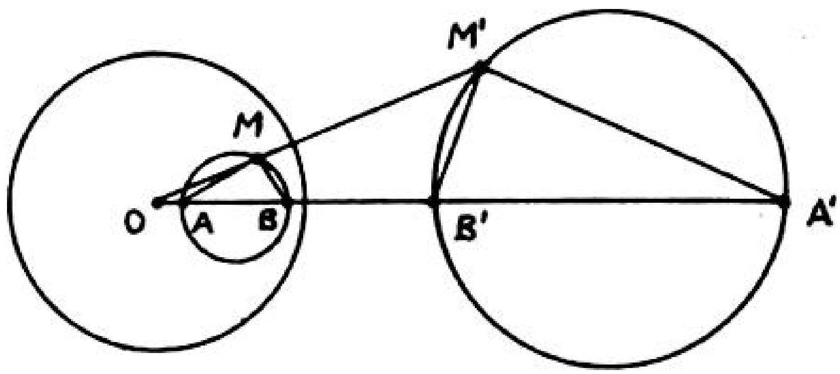
Из једнакости (1) следи да је $OP \cdot OP' = r^2$ и $OM \cdot OM' = r^2$, одакле даље добијамо да је

$$OP \cdot OP' = OM \cdot OM', \quad \text{тј.} \quad \frac{OP}{OM} = \frac{OM'}{OP'}.$$

Сада следи да су троуглови OPM и $OM'P'$ слични, јер имају заједнички угао код темена O, а странице које га образују су пропорционалне. Следи да је $\sphericalangle OM'P' = \sphericalangle OPM = 90°$, што значи да тачка M' припада кружници конструисаној над OP' као над пречником. Лако је приметити да доказ не зависи од тога да ли права пресеца кружницу у односу на коју вршимо инверзију.

5. Кружница која садржи центар инверзије O пресликава се у праву којој не припада тачка O.

6. Кружница која не пролази кроз центар инверзије трансформише се у кружницу.



Сл. 2

Заиста, поставимо кроз тачку O и центар S дате кружнице праву. Нека су A и B крајње тачке пречника дате кружнице, а M произвољна тачка на њој, сл. 2. Означимо са A', B' и M' тачке у које при инверзији прелазе тачке A, B и M. Тада важе следеће једнакости

$$OA \cdot OA' = r^2, \qquad OB \cdot OB' = r^2, \qquad OM \cdot OM' = r^2,$$

одакле добијамо да је

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OM'}{OA'}, \qquad \frac{OB}{OM} = \frac{OM'}{OB'}. \tag{2}$$

Значи, троуглови OAM и $OM'A'$ су слични, јер имају заједнички угао код темена O и, због (2), пропорционалне странице које га заклапају. Из те сличности следи да је $\sphericalangle MBO = \sphericalangle B'M'O$ и $\sphericalangle MAO = \sphericalangle A'M'O$. Како је

$$\sphericalangle MAO = \sphericalangle AMB + \sphericalangle MBO = 90^\circ + \sphericalangle MBO,$$
$$\sphericalangle A'M'O = \sphericalangle B'M'O + \sphericalangle A'M'B',$$

закључујемо да је $\sphericalangle A'M'B' = \sphericalangle AMB = 90^\circ$. Према томе, тачка M' припада кружници са пречником $A'B'$.

Ако се сада осврнемо на својства 3—6, можемо закључити да важи следеће тврђење: *при инверзији свака кружница или права прелази у кружницу или праву.* Значи, при инверзији су кружнице и праве равноправне и једне у друге могу прелазити, како кружнице, тако и праве. При томе, праву можемо сматрати кружницом бесконачно великог полупречника.

7. Ако се две кружнице или права и кружница додирују у тачки различитој од центра инверзије, тада се и њихове слике такође додирују, а ако се тачка додира поклапа са центром инверзије, тада оне прелазе у паралелне праве.

Покушајте да самостално докажете својство 7.

Вратимо се сада Аполонијевом задатку. Нека су у равни дате три кружнице ... Застанимо за тренутак. Погледајмо слику 3. На који начин могу бити распоређене три кружнице, ако се додирују или уопште немају заједничких тачака? А ако још разматрамо могуће случајеве са пресецима, морамо ли разматрати сваки случај посебно? Наравно не. Посматрајмо прво све случајеве када се две кружнице додирују (без разлике споља или изнутра). Применимо инверзију у односу на кружницу произвољног полупречника и са центром у тачки додира датих кружница. Тада на основу својства 7 кружнице које се додирују прелазе у паралелне праве, а трећа кружница у кружницу или праву. Тражена кружница добиће се инверзијом од кружнице, која додирује добијене паралелне праве и кружницу (или праву).

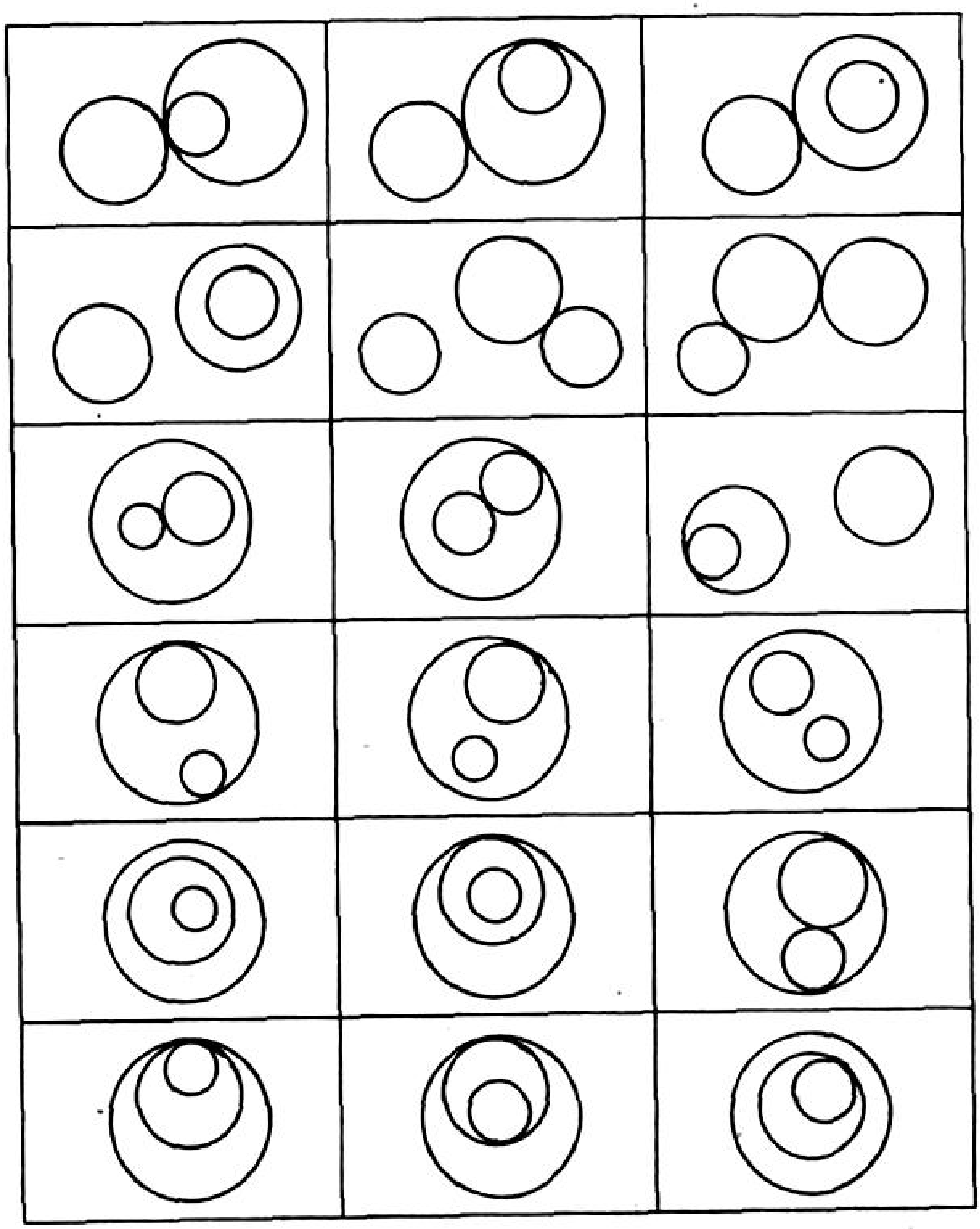
А задатак *„конструисати кружницу која додирује две дате паралелне праве и кружницу или праву“* свако од вас може лако да реши. Дакле, из овога што смо до сада рекли следи да је пут решавања следећи:

(а) Конструисати паралелне праве и кружницу (или праву) у које прелазе дате три кружнице при инверзији у односу на помоћну кружницу са центром у тачки додира.

(б) Конструисати кружницу која додирује добијене паралелне праве и кружницу (или праву).

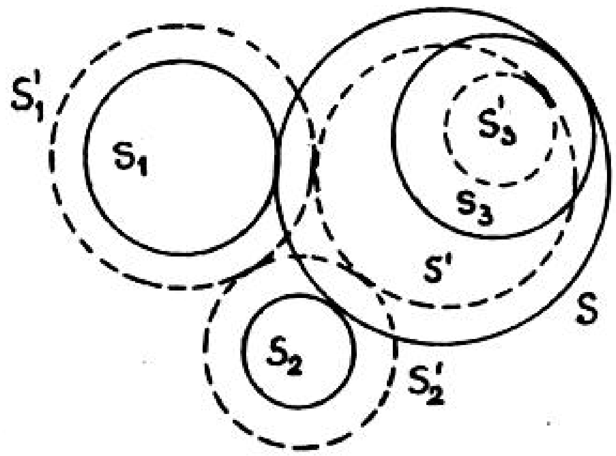
(в) Одредити тачке додира са конструисаном кружницом и одредити њихове инверзне слике на три првобитно дате кружнице, тј. оне тачке на датим кружницама које при инверзији прелазе у те тачке додира.

(г) Конструисати кружницу која садржи три тако добијене тачке



Сл. 3 Међусобни положаји три кружнице, од којих никоје две немају више од једне заједничке тачке.

Тако је случај када се две од три дате кружнице додирују решен. А у осталим случајевима задатак се своди на претходни или не постоји кружница која додирује дате кружнице. Идеју свођења осталих случајева на претходни показаћемо на једном од њих.



Сл. 4

Нека су дате три кружнице S_1, S_2 и S_3 које немају заједничких тачака (види слику 4). Треба конструисати кружницу S која додирује сваку од датих кружница. Конструишимо кружнице S_1' и S_2' концентричне са S_1 и S_2 са полупречницима увећаним за $\dfrac{a-(r_1+r_2)}{2}$, где је $a = O_1O_2$. Конструишимо још кружницу S_3' концентричну са S_3 и полупречником умањеним за ту вредност. На слици 4. су те три кружнице нацртане испрекиданим линијама. Сада можемо конструисати кружницу S' која додирује S_1', S_2' и S_3', што представља већ разматрани задатак. Лако је видети да ће кружница S концентрична са S' и полупречника увећаног за $\dfrac{a-(r_1+r_2)}{2}$ у односу на полупречник кружнице S', додиривати S_1, S_2 и S_3. Дакле, кружницу S са наведеним својством можемо конструисати.

Остаје да се примети следеће: ако се кружнице S_1 и S_2 секу, то је полупречнике тих кружница потребно прво погодно смањити, како бисмо опст задатак свели на разматрани случај.

Ако тачке сматрамо кружницама нултог полупречника, а праве — кружницама бесконачног полупречника, тада Аполонијев задатак можемо уопштити на следећи начин:

Конструисати кружницу (или праву) која додирује:

(1) три дате кружнице;
(2) дату праву и две дате кружнице;
(3) две дате праве и дату кружницу;
(4) три дате праве;
(5) дату тачку и две дате кружнице;
(6) дату тачку, дату праву и дату кружницу;
(7) дату тачку и две дате праве;
(8) две дате праве и дату кружницу;
(9) две дате тачке и дату праву;
(10) три дате тачке.

Тако смо добили десет различитих задатака, при чему су четврти и десети од тих задатака вама веома добро познати.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија МЛ XXVIII 5-6