Радомир Миловановић (Ћуприја)

ЈЕДНАЧИНЕ СА „АНТЈЕ" ФУНКЦИЈОМ

У теорији бројева „антје" функција, ознака $[x]$ (читамо „цео део броја x"), представља највећи цео број који није већи од x. На пример: $[2]=2$, $[2,6]=2$, $[-1{,}9]=-2$, $\left[1\frac{3}{4}\right]=1$, итд.

Из наведених примера примећује се да је $[x]=m$, где је $x\in R$, а $m\in Z$. Дакле, „антје" функција пресликава скуп реалних бројева на скуп целих бројева. Сада је очигледно

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

Како је $[x]=m$, где је $m\in Z$, следи:

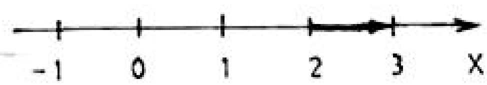
$$m\leqslant x<m+1 \tag{1}$$

Користећи релацију (1) можемо решавати једначине у којима се налази „антје" функција. Ове једначине, по начину решавања, могу се сврстати у четири основне групе.

Пример 1. Решити једначине:

а) $[x]=2$, б) $[-x]=-3$, в) $[x+5]=0$, г) $\left[\frac{x}{2}+1\right]=4$.

Решење: а) Из релације (1) следи да је $2\leqslant x<2+1$, односно $2\leqslant x<3$, па је решење једначине $[x]=2$ скуп реалних бројева из интервала $[2,\ 3)$, што се графички приказује на бројевној оси (сл. 1).



Сл. 1

Решење једначине означићемо: $2\leqslant x<3$ или $X=[2,\ 3)$.

Слично овоме решавамо остале једначине и добијамо редом решења:

б) $X=(2,\ 3]$, в) $X=[-5,\ -4)$, г) $X=[6,\ 8)$.

Пример 2. Решити једначине:

а) $[x^2]=4$, б) $[|x|]=1$, в) $[|-x|]=3$, г) $[|x-1|]=5$.

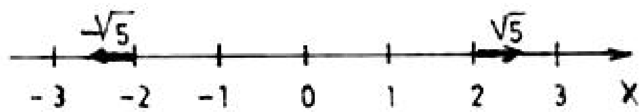
Решење: а) Применом релације (1) добија се редом:

$$4 \leqslant x^2 < 4+1,\ \sqrt{4} \leqslant |x| < \sqrt{5},\ \text{односно}\ 2 \leqslant |x| < \sqrt{5}.$$

Познату функцију $|x|$ писаћемо у облику

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Применом релације (2) даљи ток решавања једначине је следећи: за $x > 0$, имамо $2 \leqslant x < \sqrt{5}$, а за $x < 0$ је $2 \leqslant -x < \sqrt{5}$, тј. $-\sqrt{5} < x \leqslant -2$. Пошто су сви услови задовољени, решење једначине је $X = (-\sqrt{5},\ -2] \cup [2,\ \sqrt{5})$, (сл. 2).



Сл. 2

Показаном методом решавамо дате једначине чија су решења:

б) $X = (-2,\ -1] \cup [1,\ 2)$, в) $X = (-4,\ -3] \cup [3,\ 4)$,

г) $X = (-5,\ -4] \cup [6,\ 7)$.

Пример 3. Решити једначине:

а) $[x] = \dfrac{3}{4}x$, б) $\left[\dfrac{x+2}{2}\right] = x - 1$, г) $\left[\dfrac{x}{4}\right] = \dfrac{215 - 6x}{5}$,

д) $\left[\dfrac{5 + 6x}{8}\right] = \dfrac{15x - 7}{5}$.

Решење: а) Пошто је лева страна једначине цео број, истом целом броју биће једнака десна страна. Уводимо смену

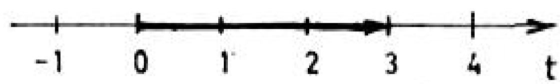
$t = \dfrac{3}{4}x$, где је t цео број ($t \in Z$). Из $t = \dfrac{3}{4}x$ следи

$$x = \frac{4}{3}t. \tag{3}$$

У датој једначини вршимо замену x са $\frac{4}{3}t$ и добијамо

$$t \leqslant \frac{4}{3}t < t+1.$$

Из $t \leqslant \frac{4}{3}t$ добија се $t \geqslant 0$, а из $\frac{4}{3}t < t+1 \Rightarrow t < 3$.



Сл. 3

На бројевној оси (сл. 3) представљен је интервал бројева у коме је $t \in \{0, 1, 2\}$, јер је $t \in Z$. Заменом вредности целог броја t у релацији, (3) добићемо скуп решења једначине:

$$X = \left\{0,\ 1\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3}\right\}.$$

Наведеним поступком долази се до решења осталих једначина: б) $X = \{3, 4\}$, в) $X = 30$, г) $X = \left\{\frac{7}{15}, \frac{4}{5}\right\}$.

Пример 4. Решити једначине:

а) $\left[\frac{x}{2}\right] = [x]$, б) $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{a+1}\right]$ за $a \in \{2, 3, \ldots\}$,

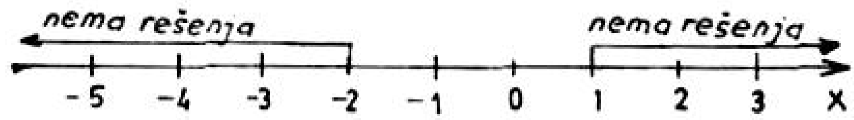
в) $[x-1] = \left[\frac{x+2}{2}\right]$.

Решење; Означимо $\left[\frac{x}{2}\right] = t$. Мора бити $[x] = t$, где је $t \in Z$. Применом упознатих поступака добија се паралелно из прве и друге једначине:

$$t \leqslant \frac{x}{2} < t+1, \qquad 2t \leqslant x < 2t+2 \tag{4}$$

$$t \leqslant x < t+1, \qquad t \leqslant x < t+1 \tag{5}$$

Најпре ћемо одредити интервале у којима не постоји решење дате једначине. Јасно је да решење не постоји ако изменимо захтеве дате у релацијама (4) и (5). Тако се добија да $2t$ из интервала (4) није мање од $t+1$ из интервала (5), тј. $2t \geqslant t+1$ одакле је $t \geqslant 1$. Слично овоме имамо да је $2t+2 \leqslant t$, одакле је $t \leqslant -2$. Дакле, решење не постоји за $t \leqslant -2$ и $t \geqslant 1$, али зато постоји у интервалу $-2 < t < 1$.



Сл. 4

Како је t цео број, то је $t=-1$ или $t=0$. За $t=-1$ из (4) и (5) добија се:

$$-2 \leqslant x < 0,$$

$$-1 \leqslant x < 0, \text{ одакле је } -1 \leqslant x < 0. \tag{6}$$

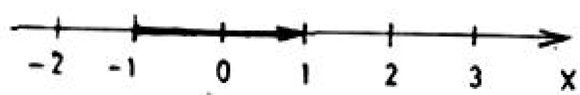
За $t=0$ имамо:

$$0 \leqslant x < 2,$$

$$0 \leqslant x < 1 \text{ одакле је } 0 \leqslant x < 1. \tag{7}$$

Из интервала (6) и (7) следи решење дате једначине:

$X = [-1, 0) \cup [0, 1) = [-1, 1)$, или на бројевној оси (сл. 5).



Сл. 5.

Решења датих једначина:

б) за $a=2$, $X=[-2, 2)$, итд.; в) $X=[3, 5)$.

Задаци

1. Колико има природних бројева мањих од 1000 који су:

а) дељиви са n кад је $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$,

б) нису дељиви ни са 3 ни са 5, итд.

2. Реши једначине и провери добијена решења:

а) $\left[\frac{2x+3}{3}\right]=1$, б) $\left[\frac{3x+a}{a}\right]=2$, ако је $a\in\{1, 2, 3, \ldots\}$

в) $\left[\frac{x^2-1}{3}\right]=1$, г) $[x]=\frac{5}{2}-|x|$, д) $\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{3x}{m+1}\right]$ за $m\in\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија