Даниел Велинов
Скопје

НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ ВО ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ

Овде ќе бидат дадени дефинициите и основните својства на најголем заеднички делител и најмал заеднички содржател. Иако овие концепти се едноставни, ќе бидат дадени примери каде тие се инволвирани во покомплицирани задачи.

Нека со D_a го означиме множеството од сите делители на a, а со D_b го означиме множеството од сите делители на b. Дефинираме најголем заеднички делител на броевите a и b, означуваме со $Н.З.Д(a,b)$, (често пишуваме и (a,b)), со $Н.З.Д(a,b)=\max\{D_a \cap D_b\}$.

Ако $Н.З.Д(a,b)=1$ т.е. $D_a \cap D_b=\{1\}$, за броевите a и b велиме дека се заемно прости.

Пропозиција.

1) p е прост, $НЗД(p,m)=p$ или $НЗД(p,m)=1$

2) Ако $d=НЗД(m,n)$, $m=dm'$, $n=dn'$, тогаш $НЗД(m',n')=1$

3) Ако $d=НЗД(m,n)$, $m=d'm''$, $n=d'n''$, $НЗД(m'',n'')=1$, тогаш $d=d'$

4) Ако d' е заеднички делител на m и n, тогаш $d' \mid НЗД(m,n)$

5) Ако $p^x \parallel m$, $p^y \parallel n$, тогаш $p^{\min\{x,y\}} \parallel НЗД(m,n)$. Дополнително, ако

$$m=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \text{ и } n=p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

тогаш

$$НЗД(m,n)=p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

6) Ако $m=nq+r$, тогаш $Н.З.Д(m,n)=Н.З.Д(n,r)$

7) $НЗД(НЗД(m,n),p)=НЗД(m,НЗД(n,p))$

8) Ако $d \mid a_i$, $i=1,2,\ldots,s$, тогаш $d \mid НЗД(a_1,a_2,\ldots,a_s)$

9) Ако $a_i=p_1^{\alpha_{i1}} p_2^{\alpha_{i2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_{ik}}$, $i=1,2,\ldots,s$, тогаш

$$НЗД(a_1,a_2,\ldots,a_s)=p_1^{\min\{\alpha_{11},\alpha_{21},\ldots,\alpha_{s1}\}} p_2^{\min\{\alpha_{12},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{s2}\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots,\alpha_{sk}\}}.$$

Теорема (Теорема на Безу). За природните броеви m и n постојат x и y природни броеви такви што $mx+ny=НЗД(m,n)$.

Последица. Ако $a \mid bc$ и $НЗД(a,b)=1$, тогаш $a \mid c$

Последица. Нека a и b се заемно прости броеви и $c \in \mathbb{N}$ таков што $a \mid c$ и $b \mid c$. Тогаш $ab \mid c$

Последица. Нека p е прост број и нека $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k < p$. Тогаш $p \mid \binom{p}{k}$.

Нека M_a е множеството од сите содржатели на a и M_b е множеството од сите содржатели на b. Дефинираме најмал заеднички содржател на броевите a и b, пишуваме $НЗС(a,b)$ (често се пишува и $[a,b]$) со $НЗС(a,b) = \min\{M_a \cap M_b\}$.

Теорема. Точни се следниве тврдења:

1) Ако $НЗС(a,b) = t$, тогаш $t = aa'$, $t = bb'$, $НЗД(a',b') = 1$
2) Ако $m = НЗС(s,t)$, тогаш за секој заеднички содржател m' важи $m \mid m'$
3) Ако $m' = НЗС(s,t)$, $m' = ss' = tt'$, $НЗД(s',t') = 1$, тогаш $m' = m$
4) Ако $m \mid s$ и $n \mid s$, тогаш $НЗС(m,n) \mid s$
5) Нека $n \in \mathbb{Z}$. Тогаш $nНЗС(s,t) = НЗС(ns,nt)$
6) Ако $s = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $t = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, $\alpha_i, \beta_i \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,k$ тогаш
$$НЗС(s,t) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

Теорема. За $m,n \in \mathbb{N}$ важи $m \cdot n = НЗД(m,n) \cdot НЗС(m,n)$.

Пропозиција. Ако $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, тогаш n има
$$\tau(n) = (a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_k+1)$$
делители.

Во продолжение ќе дадеме неколку примери каде се користат дел од претходно наведените својства.

1. (BxMO, 2016, Problem 1) За природен број n кој не е степен на 2, дефинираме $t(n)$ да биде најголемиот позитивен непарен делител на n и $r(n)$ да биде најмалиот позитивен непарен делител на n, различен од 1. Најди ги сите природни броеви n кои не се степен на 2 за кои важи $n = 3t(n) + 5r(n)$.

Решение. Нека p е најмалиот прост делител на n. Тогаш $r(n) = p$. Можеме n да го запишеме како $n = 2^t mp$, за m непарен и $t \ge 0$. Тогаш $t(n) = pm$, па равенството во условот на задачата преминува во $2^t mp = 3mp + 5p$, односно $(2^t - 3)mp = 5p$, т.е.
$$(2^t - 3)m = 5.$$
Јасно е сега дека m мора да биде делител на 5, па $m = 1$ или $m = 5$.

Ако $m=1$, тогаш $2^t-3=5$, односно $2^t=8$, т.е. $t=3$. Тогаш имаме решение $n=8p$, за p прост непарен број.

Ако $m=5$, тогаш $2^t-3=1$, од каде $t=2$. Тогаш имаме $n=4\cdot 5\cdot p$, за p прост непарен број.

Бидејќи p е најмалиот прост делител на n, мора $p=3$ во првиот случај и $p=5$ во вториот случај. Значи сите природни броеви се $n=60$ и $n=100$.

2. (TST 2, Argentine National Olympiad, 2015, Problem 5) Најди ги сите природни броеви n кои можат да се запишат како

$$n=[a,b]+[b,c]+[c,a] \tag{3}$$

каде $a,b,c\in\mathbb{N}$ и $[x,y]=НЗС(x,y)$.

Решение. Сите природни броеви n можат да се претставаат освен степените на 2.

Нека

$$f(a,b,c)=[a,b]+[b,c]+[c,a].$$

Нека избереме $k\in\mathbb{N}$ и нека $a=k$, $b=c=1$. Тогаш $f(k,1,1)=2k+1$. Значи сите непарни броеви $n\geq 3$ можат да се запишат како во условот на задачата. Да забележиме дека ако n може да се запише во облик (3), тогаш може и $2n$, бидејќи $[2u,2v]=2[u,v]$ повлекува

$$f(2a,2b,2c)=2f(a,b,c).$$

Па секој природен број $n\geq 3$ може да се запише како (3) ако има еден непарен делител поголем од 1.

Остануваат степените на 2, односно 2^k, за $k\geq 0$. Ќе покажеме дека не можат да се запишат како (3). Ова е точно за $k=0$ и $k=1$ бидејќи $f(a,b,c)\geq 3$, за сите $a,b,c\in\mathbb{N}$. Нека $f(a,b,c)=2^k$, за $k\geq 2$. Нека k е најмалиот број со такво својство. Да забележиме дека барем два од броевите a,b,c се парни. Во спротивно $f(a,b,c)$ е непарен, додека 2^k е парен број што е контрадикција. Ако a,b,c се сите парни, тогаш тие можат да се поделат со 2, па $f(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})=2^{k-1}$, што е во контрадикција со минималноста на k.

Сега нека претпоставиме дека a и b се парни, а c е непарен. Тогаш

$$[a,b]=2[\tfrac{a}{2},\tfrac{b}{2}] \text{ и } [a,c]=2[\tfrac{a}{2},c],\ [b,c]=2[\tfrac{b}{2},c].$$

Следува дека $f(\frac{a}{2},\frac{b}{2},c)=\frac{1}{2}f(a,b,c)=2^{k-1}$, што е во контрадикција повторно со минималноста на k.

3. (TST, Greece, 2016, Problem 1) Низата a_n е дадена со

$$a_0 = 3 \text{ и } a_{n+1} - a_n = n(a_n - 1),\ n \geq 0.$$

Најди ги сите броеви m за кои $НЗД(m, a_n) = 1$, за сите $n \geq 0$.

Решение. Рекурентната релација може да се запише како

$$a_{n+1} - 1 - (a_n - 1) = n(a_n - 1)$$

$$a_{n+1} - 1 = (n+1)(a_n - 1)$$

Според ова имаме:

$$\begin{cases} a_{n+1} - 1 = (n+1)(a_n - 1) \\ a_n - 1 = n(a_{n-1} - 1) \\ \vdots \\ a_2 - 1 = 2(a_1 - 1) \\ a_1 - 1 = a_0 - 1 \end{cases},$$

од каде $a_{n+1} - 1 = (n+1)n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 = 2(n+1)!$.

Па, $a_n = 2 \cdot n! + 1$. Нека $m > 1$ е природен број. Ги разгледуваме следниве случаи:

- Ако $m = 2^s$, бидејќи сите членови од низата се непарни, $НЗД(m, a_n) = 1$.
- Ако постои прост број p поголем или еднаков од 3, каде $p \mid m$, ќе докажеме дека $НЗД(m, a_{p-3}) \neq 1$. Всушност, од теоремата на Вилсон, имаме $a_{p-3} = 2(p-3)! + 1 \equiv (p-1) + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

Па, имаме $p \mid a_{p-3}$,од каде $p \mid Н.З.Д(m, a_{p-3})$.

Конечно сите броеви кои го задоволуваат условот на задачата се од облик $m = 2^s$, каде $s \geq 0$.

4. (TST 1, Nederland, 2016, Problem 3) Најди ги сите природни броеви k, за кои равенката $НЗС(m,n) - НЗД(m,n) = k(m-n)$, нема решенија $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, за $m \neq n$.

Решение. Нека $d = НЗД(m,n)$. Тогаш $m = da$ и $n = db$. Имајќи предвид дека $НЗС(m,n) \cdot НЗД(m,n) = m \cdot n$, па почетната равенка добива облик

$$\frac{da \cdot db}{d} - d = k(da - db),$$

односно

$$ab - 1 = k(a - b) \tag{4}$$

Го разгледуваме следниов еквивалентен проблем: Најди ги сите природни броеви k за кои (4) нема решенија (a,b), $a \neq b$ во природните броеви и $НЗД(a,b) = 1$. Да забележиме дека ако парот (a,b) ја задоволува равенката (4), директно следува дека $НЗД(a,b)=1$. Навистина, нека $t\,|\,a$ и $t\,|\,b$, тогаш имаме $t\,|\,ab$ и $t\,|\,(a-b)$, па $t\,|\,1$, од каде заклучуваме дека $t=1$, од каде $НЗД(a,b)=1$.

Прво нека претпоставиме дека $k\geq 3$. Тврдиме дека $(a,b)=(k^2-k-1,k-1)$ е решение. Навистина,

$$ab-1=a(k-1)-1=ka-a-1=ka-k^2+k=k(a-k+1)=k(a-b).$$

Од дискусијата претходно, имаме дека $НЗД(a,b)=1$, па останува да покажеме дека a и b се природни броеви и се различни. Бидејќи $k\geq 3$, имаме $b=k-1\geq 2$ и $a=k^2-k-1\geq 2k-k-1=k-1\geq 2$, па a и b се позитивни. Ако $a=b$, тогаш $k^2-k-1=k-1$, па $k^2=2k$, од каде $k=2$, што е контрадикција. Според ова (a,b) е бараното решение. Па, тоа значи дека (4) има решение (a,b), $a\neq b$ во природните броеви и $НЗД(a,b)=1$.

Нека $k=1$. Тврдиме дека $(a,b)=(2,1)$ е решение. Јасно, $a\neq b$, $a,b>0$ и $НЗД(a,b)=1$. Уште повеќе имаме

$$ab-1=2-1=1=1(2-1)=k(a-b).$$

Следува (4) има решение (a,b) во природните броеви, $a\neq b$ и $НЗД(a,b)=1$.

Нека претпоставиме сега $k=2$. Тогаш равенката (4) е $ab-1=2(a-b)$. Десната страна е најмногу $2a-2$, бидејќи b е природен број, па $ab-1\leq 2a-2$, па $ab<2a$, односно $b<2$. Од овде мора $b=1$, па (4) добива облик $a-1=2(a-1)$, што повлекува $a-1=0$, од каде $a=b=1$, па $a=b$. Следува дека не постојат решенија (a,b) за (4) во природните броеви, $a\neq b$ и $НЗД(a,b)=1$.

Конечно, заклучуваме дека единствено k, за кое равенката (4) нема решенија (m,n) во природните броеви, $m\neq n$ е $k=2$.

5. (IMO 2006, Shortlist N3) Низата $f(1), f(2), f(3),...$ е дефинирана со

$$f(n)=\frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+...+\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right),$$

каде $\lfloor x\rfloor$ е цел дел од x.

а) Докажи дека $f(n+1)>f(n)$, за бесконечно многу $n\in\mathbb{N}$;

б) Докажи дека $f(n+1)<f(n)$ за бесконечно многу $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $g(n)=nf(n)$, за $n\geq 1$ и $g(0)=0$. Имаме дека за $k=1,2,...,n$, $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor=0$, ако k не е делител на n и $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-1}{k}\right\rfloor=1$, ако k е делител на n.

Ако со $d(n)$ го означиме бројот на делители на $n\geq 1$, тогаш

$$g(n)=\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{n}{n-1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$$
$$=\left\lfloor\frac{n-1}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{n-1}{n-1}\right\rfloor+d(n)$$
$$=g(n-1)+d(n)$$

Следува,

$$g(n)=g(n-1)+d(n)=g(n-2)+d(n-1)+d(n)=\ldots=d(1)+d(2)+\ldots+d(n),$$

од каде

$$f(n)=\frac{d(1)+d(2)+\ldots+d(n)}{n}.$$

За да ги докажеме а) и б) доволно е да докажеме дека $d(n+1)>f(n)$ и $d(n+1)<f(n)$ важат за бесконечно многу $n\in\mathbb{N}$.

Да забележиме дека $d(1)=1$. За $n>1$, $d(n)\geq 2$ важи, при што еднаквост важи кога n е прост број. Бидејќи $f(6)=\frac{7}{3}>2$, следува дека $f(n)>2$ за сите $n\geq 6$. Бидејќи има бесконечно многу прости броеви, $d(n+1)=2$, важи за бесконечно многу $n\in\mathbb{N}$, па за $n\geq 6$ имаме $f(n+1)=2<f(n)$. Со ова го докажавме б).

За да го докажеме а), да забележиме дека $d(1),d(2),d(3),\ldots$, е неограничена (на пример $d(2^k)=k+1$, за сите $k\in\mathbb{N}$).

Следува $d(n+1)>\max\{d(1),d(2),\ldots,d(n)\}$ за бесконечно многу n. Точно за тие $n\in\mathbb{N}$ важи $d(n+1)>f(n)$, со што е докажано а).

6. (Hong Kong Mathematical Olympiad, 2015, Problem 2) Најди ги сите подредени тројки (x,y,z) така што $\sqrt{\frac{2015}{x+y}}+\sqrt{\frac{2015}{y+z}}+\sqrt{\frac{2015}{z+x}}$ е природен број.

Решение. Најпрво ќе ја докажеме следнава лема: Ако p,q,r и $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ се рационални броеви, тогаш и $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$ се рационални броеви.

Доказ. Нека $S=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$. Од претпоставката дека S е позитивен рационален број имаме $\sqrt{p}+\sqrt{q}=S-\sqrt{r}$, од каде $p+q+2\sqrt{pq}=S^2+r-2S\sqrt{r}$ или $2\sqrt{pq}=S^2+r-p-q-2S\sqrt{r}$. Нека сега ставиме $T=S^2+r-p-q$. Тогаш T е позитивен рационален број и $2\sqrt{pq}=T-2S\sqrt{r}$, па $4pq=T^2+4S^2r-4ST\sqrt{r}$, од каде

$$\sqrt{r}=\frac{T^2+4S^2r-4pq}{4ST},$$

па добиваме дека $\sqrt{r}$ е рационален број.

Сега од лемата имаме дека $\sqrt{\frac{2015}{x+y}}+\sqrt{\frac{2015}{y+z}}+\sqrt{\frac{2015}{z+x}}$ се рационални броеви. Нека

$$N=2015,\ \sqrt{\frac{2015}{x+y}}=\frac{a}{b},\ \sqrt{\frac{2015}{y+z}}=\frac{c}{d} \text{ и } \sqrt{\frac{2015}{z+x}}=\frac{e}{f}$$

и нека претпоставиме дека броевите a,b,c,d,e,f се природни броеви и

$$НЗД(a,b)=НЗД(c,d)=НЗД(e,f)=1.$$

Тогаш од $\sqrt{\frac{2015}{x+y}}=\frac{a}{b}$ имаме $Nb^2=a^2(x+y)$, па a^2 е делител на 2015, па $a=1$. Аналогно $c=e=1$. Според ова,

$$\sqrt{\frac{2015}{x+y}}+\sqrt{\frac{2015}{y+z}}+\sqrt{\frac{2015}{z+x}}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$$

е природен број. Имајќи предвид дека b,d,f се природни броеви имаме

$$1\le\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{f}\le 3.$$

Случај 1. $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=1$. Јасно се добива дека $(b,d,f)=(3,3,3),(2,3,6),(2,4,4)$, ако претпоставиме дека $b\le d\le f$.

- $(b,d,f)=(3,3,3)$. Имаме $x+y=9N$, $y+z=9N$ и $z+x=9N$, па според ова $x=y=z=\frac{9N}{2}=9067,5$, што не е природен број.
- $(b,d,f)=(2,3,6)$. Имаме $x+y=9N$, $y+z=36N$, $z+x=4N$, од каде повторно се добива дека x,y,z не се природни броеви.
- $(b,d,f)=(2,4,4)$. Имаме $x+y=4N$, $y+z=16N$, $z+x=16N$ од каде добиваме $x=y=2N=4030$ и $z=14N=28210$.

Случај 2. $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=2$. Во овој случај имаме $(b,d,f)=(1,2,2)$ ако претпоставиме $b\le d\le f$. Тогаш имаме $x=y=\frac{N}{2}=1007,5$ и $z=\frac{7N}{2}=7052,5$ што не се природни броеви.

Случај 3. $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=3$. Јасно мора $b=d=f=1$, па добиваме $x=y=z=\frac{N}{2}$ $=1007,5$, што не е природен број.

Значи решението е сите пермутации на тројката $(x,y,z)=(4030,4030,28210)$.

7. (IMO 2006, Shortlist N1) Најди ги сите парови (x,y), $x,y\in\mathbb{Z}$ кои се решенија на равенката $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

Решение. Ако (x,y) е решение, тогаш очигледно $x\ge 0$ и $(x,-y)$ е решение. За $x=0$, имаме две решенија $(0,2)$ и $(0,-2)$.

Нека сега, (x,y) е решение со $x>0$ и без губење на општоста претпоставуваме $y>0$. Равенката може да се презапише како

$$2^x(1+2^{x+1})=(y-1)(y+1),$$

од каде следува дека $y-1$ и $y+1$ се парни, а дополнително точно еден од нив е делив со 4. Следува $x\geq 3$ и еден од множителите е делив со 2^{x-1}, но не е делив со 2^x. Па, $y=2^{x-1}m+\varepsilon$, каде m е непарен и $\varepsilon=\pm 1$, заменувајќи во почетната равенка, имаме

$$2^x(1+2^{x-1})=(2^{x-1}m+\varepsilon)^2-1=2^{2x-2}m^2+2^x m\varepsilon$$

или

$$1+2^{x+1}=2^{x-2}m^2+m\varepsilon.$$

Следува,

$$1-\varepsilon m=2^{x-2}(m^2-8) \qquad (5)$$

За $\varepsilon=1$, добиваме $m^2-8\leq 0$, т.е. $m=1$, не ја задоволува (5).

За $\varepsilon=-1$, равенката (5) добива облик $1+m=2^{x-2}(m^2-8)\geq 2(m^2-8)$, од каде добиваме $2m^2-m-17\leq 0$.

Следува $m\leq 3$, но $m\neq 1$ од (5). Бидејќи m е непарен, мора $m=3$, па добиваме $x=4$. Од (5) добиваме $y=23$.

Значи сите решенија на равенката се: $(0,-2),(0,2),(4,23),(4,-23)$.

8. (TST 3, Argentine National Olympiad, 2015, Problem 2) Најди ги сите парови $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $a\neq b$, така што $a+b$ и $ab+1$ се степени на 2.

Решение. Ако $a=1$ или $b=1$, добиваме дека се решенија

$$(1,2^n-1) \text{ и } (2^n-1,1), \text{ за } n>1.$$

Нека $a,b\geq 2$ и $a<b$. Да забележиме дека $a+b<ab+1$, бидејќи

$$(ab+1)-(a+b)=(a-1)(b-1)>0.$$

Нека $a+b=2^n$, $n\geq 2$. Во оваа ситуација $n\geq 3$, бидејќи $n=2$ ни дава $a=b=2$. Тогаш $a=2^{n-1}-c$, $b=2^{n-1}+c$, каде $1\leq c<2^{n-1}$. Имаме

$$2^n=a+b<ab+1=2^{2(n-1)}-c^2+1<2^{2(n-1)},$$

од каде следува $ab+1=2^k$, каде $n+a\leq k\leq 2(n-1)$. Запишуваме

$$2^k=2^{2(n-1)}-c^2+1, \text{ т.е. } ab+1=2^k,$$

односно $c^2-1=2^{2(n-1)}-2^k$, што е еквивалентно со

$$(c-1)(c+1)=2^{2(n-1)}-2^k.$$

Оттука имаме дека $2^k\mid(c-1)(c+1)$, бидејќи $k\leq 2(n-1)$.

Од друга страна, $n+1\le k$, па $2^{n+1}\mid(c-1)(c+1)$. Јасно $c-1$ и $c+1$ се два последователни парни броеви. Бидејќи еден од нив е делив со 2, но не е делив со 4, едниот од нив е делив со 2^n.

Сега од неравенствата $1\le c<2^{n-1}$, имаме дека последното е можно (едниов од нив да биде делив со 2^n) само ако $c-1=0$, т.е. $c=1$. Следува $a=2^{n-1}-1$, $b=2^{n-1}+1$, за $n\ge 3$. Ова јасно е пар кој ги задоволува условите на задачата.

Конечно, решенијата се $(1,2^n-1),(2^n-1,1),(2^n-1,2^n+1),(2^n+1,2^n-1)$ за $n>1$.

9. (IMO 2008, Shortlist N1) Нека n е природен број и p е прост број. Докажи дека ако a,b,c се цели броеви за кои важи

$$a^n+pb=b^n+pc=c^n+pa,$$

тогаш $a=b=c$.

Решение. Ако два од броевите a,b,c се еднакви, тогаш веднаш следува дека сите три броеви a,b,c се еднакви. Па, можеме да претпоставиме дека $a\ne b\ne c \ne a$. Одземајќи ги равенките од условот на задачата добиваме $a^n-b^n=-p(b-c)$ и нејзините циклични копии. Множејќи ги трите добиени равенки имаме

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\frac{b^n-c^n}{b-c}\cdot\frac{c^n-a^n}{c-a}=-p^3.$$

Ако n е непарен, тогаш a^n-b^n и $a-b$ имаат ист знак, па производот на лево е позитивен, додека десната страна е негативна. Значи, n мора да биде парен.

Нека d е најголемиот заеднички делител на трите разлики $a-b$, $b-c$, $c-a$, па $a-b=du$, $b-c=dv$, $c-a=dw$, каде $НЗД(u,v,w)=1$ и $u+v+w=0$.

Од $a^n-b^n=-p(b-c)$ имаме дека $(a-b)\mid p(b-c)$, т.е. $u\mid pv$ и циклично $v\mid pw$ и $w\mid pu$. Бидејќи $НЗД(u,v,w)=1$ и $u+v+w=0$, мора најмногу еден од броевите u,v,w може да биде делив со p. Ако претпоставиме дека простиот број p не дели ниту еден од нив, имаме $u\mid v$, $v\mid w$, $w\mid u$, од каде $|u|=|v|=|w|=1$, што пак е во контрадикција со $u+v+w=0$.

Заклучуваме дека p мора да дели точно еден од броевите. Нека на пример, $p\mid u$, па запишуваме $u=pu_1$. Сега добиваме слично како претходно, $u_1\mid v, v\mid w$, $w\mid u_1$, па $|u_1|=|v|=|w|=1$. Равенката $pu_1+v+w=0$, ни дава дека простиот број p мора да биде парен, односно мора $p=2$. Следува, $v+w=-2u_1=\pm 2$, од каде $v=w=\pm 1$ и $u=2v$. Уште, $a-b=-2(b-c)$.

Знаејќи дека n е парен број, т.е. $n=2k$, равенката $a^n-b^n=-p(b-c)$ можеме да ја презапишеме (знеајќи дека $p=2$) во обликот

$$(a^k+b^k)(a^k-b^k)=-2(b-c)=a-b\,.$$

Вториот множител на левата страна е делив со $a-b$, па мора првиот множител на левата страна (a^k+b^k) да биде ± 1. Тогаш точно еден од броевите a и b мора да биде непарен. Но, $a-b=-2(b-c)$ е парен, што е контрадикција, со што задачата е докажана.

10. (IMO 2008, Shortlist N2) Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се различни природни броеви, $n\ge 3$. Докажи дека постојат различни индекси i,j така што a_i+a_j не дели никој од броевите $3a_1,3a_2,...,3a_n$.

Решение. Без губење на општоста, нека $0<a_1<a_2<...<a_n$. Можеме да претпоставиме дека $a_1,a_2,...,a_n$ се заемно прости. Во спротивно кога ќе ги поделиме со нивниот најголем заеднички делител ќе добиеме заемно прости броеви.

Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно. Тогаш за секој $i<n$ постои j така што a_n+a_i го дели $3a_j$. Ако a_n+a_i не е деливо со 3, тогаш a_n+a_i го дели a_j, што не е можно бидејќи $0<a_j\le a_n<a_n+a_i$. Следува $3\,|\,a_n+a_i$, за $i=1,2,...,$ $n-1$, па $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ се конгруентни со $(-a_n)$ по модул 3. Сега, a_n не е делив со 3, бидејќи во спротивно сите a_i, $i=1,2,...,n-1$ ќе бидат деливи со 3, што е во контрадикција со тоа дека $a_1,a_2,...,a_n$ се заемно прости. Следува $a_n\equiv r(\mathrm{mod}\,3)$, каде $r\in\{1,2\}$ и $a_i\equiv 3-r(\mathrm{mod}\,3)$ за сите $i=1,2,...,n-1$.

Нека сега ја разгледуваме сумата $a_{n-1}+a_i$, каде $1\le i\le n-2$. Постои таква една сума бидејќи $n\ge 3$. Нека j е индекс така што $a_{n-1}+a_i\,|\,3a_j$. Да забележиме дека $a_{n-1}+a_i$ не е делив со 3, бидејќи $a_{n-1}+a_i\equiv 2a_i\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. Следува дека $a_{n-1}+a_i\,|\,a_j$, од каде $a_{n-1}+a_i\le a_j$. Следува $a_{n-1}<a_j\le a_n$, од каде $j=n$. Па, a_n е делив со сите збирови $a_{n-1}+a_i$, $1\le i\le n-2$. Всушност $a_{n-1}+a_i\le a_n$, $i=1,2,...,n-2$.

Нека j е таков што $a_n+a_{n-1}\,|\,3a_j$. Ако $j\le n-2$, тогаш

$$a_n+a_{n-1}\le 3a_j<a_j+2a_{n-1}.$$

Од овде добиваме $a_n<a_{n-1}+a_j$. Од друга страна $a_{n-1}+a_j\le a_n$, за $j\le n-2$. Следува $j=n-1$ или $j=n$. Следува, $3a_{n-1}=a_n+a_{n-1}$, односно $a_n=2a_{n-1}$.

За $j=n-1$, добиваме $3a_{n-1}=k(a_n+a_{n-1})$, каде k е цел број. Мора $k=1$, бидејќи ако $k\le 0$ и $k\ge 3$ имаме контрадикција со $0<a_{n-1}<a_n$, а за $k=2$ имаме $a_{n-1}=2a_n>a_{n-1}$, што е контрадикција.

Слично, ако $j=n$, тогаш $3a_n = k(a_n + a_{n-1})$, за некој цел број k и само $k=2$ е можно. Следува $a_n = 2a_{n-1}$ важи и во овој случај. Значи и во двата случаи $j=n-1$ и $j=n$ добиваме $a_n = 2a_{n-1}$.

Сега $a_n = 2a_{n-1}$ следува дека збирот $a_{n-1}+a_1$ е строго помеѓу $\frac{a_n}{2}$ и a_n. Но, a_{n-1} и a_1 се различни, за $n \geq 3$, па од дискусијата погоре имаме дека $a_{n-1}+a_1 \mid a_n$ што е контрадикција бидејќи $\frac{a_n}{2} < a_{n-1}+a_1 < a_n$.

Користена литература

1. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 Number theory problems, Birkhauser, Boston, 2007.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011.
3. German Mathematical Olympiad, 2016.
4. Argentine National Olympiad, 2015.
5. 66st Belarusian Mathematical Olympiad, 2016.
6. 54th Dutch Mathematical Olympiad 2015.
7. Hellenic Mathematical Competitions 2016.
8. Japan Mathematical Olympiad 2016.
9. Problems of the 47th Austrian Mathematical Olympiad 2016.
10. Hong Kong Mathematical Competitions 2015.
11. 47th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Slovenia, 2006.
12. 48th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Vietnam, 2007.
13. 49th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Spain, 2008.
14. 50th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Germany, 2009.
15. 51st International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Kazakhstan, 2010.
16. 52nd International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Netherlands, 2011.
17. 53th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Argentina, 2012.
18. 54th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Colombia, 2013.
19. 55th International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, South Africa, 2014.
20. 56st International Mathematical Olympiad, Shortlisted problems with solutions, Thailand, 2015.