Републички натпревар 1978

I година

1. Докажи дека $(x+y)^4 \leq 8(x^4+y^4)$.

Решение. Ќе го искористиме равенството $2ab \leq a^2+b^2$, кое важи за кои било a и b, а следува од очигледното неравенство $(a-b)^2 \geq 0$. Имаме

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= [(x+y)^2]^2 = (x^2+2xy+y^2)^2 \\
&\leq (x^2+x^2+y^2+y^2)^2 = 4(x^2+y^2)^2 \\
&= 4(x^4+2x^2y^2+y^4) = 4(x^4+y^4)+4\cdot 2x^2y^2 \\
&\leq 4(x^4+y^4)+4(x^4+y^4) = 8(x^4+y^4).
\end{aligned}
$$

2. Докажи дека бројот 3^k не може да се претстави како збир од квадратите од два природни броја, за ниту еден природен број k.

Решение. Да го разгледаме изразот a^2+b^2, каде што a и b се природни броеви. Секој од броевите a и b може да се претстави во еден од облиците $3s, 3s+1$, $3s+2$.

Ако a и b двата се од облик $3s$, на пример $a=3a_1$, $b=3b_1$ тогаш

$$a^2+b^2 = 3^2(a_1^2+b_1^2),$$

па, ако $a^2+b^2=3^k$, тогаш $a_1^2+b_1^2=3^{k-2}$. Значи, можеме да претпоставиме дека a и b двата не се од облик $3s$. Во тој случај имаме

$$\left.\begin{array}{l} a=3a_1, b=3b_1+1 \\ a=3a_1, b=3b_1+2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=3A+1$$

$$\left.\begin{array}{l} a=3a_1+1,\ b=3b_1+1 \\ a=3a_1+1,\ b=3b_1+2 \\ a=3a_1+2,\ b=3b_1+2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=3A+2,$$

што значи дека $a^2+b^2 \neq 3^k$.

3. Иста е со задача 3 од втора година

4. Во три садови има вода. Ако една половина од водата во првиот сад се прелие во вториот, а потоа една третина од водата што се нашла во вториот сад се прелие во третиот сад, а најпосле една четвртина од водата во третиот сад се прелие во првиот сад, тогаш во секој сад ќе има по $6l$. (Притоа, садовите се доволно големи за да се извршат споменатите преливања).

Колку вода имало во секој сад пред почетокот на оваа постапка?

Решение. *Прв начин.* Ако во првиот сад има $x\ l$, во вториот $y\ l$, во третиот сад $z\ l$, тогаш по првото преливање, во првиот сад ќе има $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\ l$, во вториот сад ќе има $y+\frac{x}{2}\ l$, додека по преливањето од вториот сад во третиот, во вториот сад ќе остане

$$y+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{3}(2y+x), \tag{1}$$

а во третиот сад ќе има

$$z+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{6}(6z+2y+x)$$

литри. По преливањето од третиот во првиот сад, во третиот сад ќе остане

$$\frac{1}{6}(6z+2y+x)-\frac{1}{24}(6z+2y+x)=\frac{1}{8}(6z+2y+x) \tag{2}$$

литри вода, а во првиот ќе има

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{24}(6z+2y+x)=\frac{1}{24}(6z+2y+13x). \tag{3}$$

Имајќи го предвид условот на задачата и (1), (2) и (3) , го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases} x+2y=6\cdot 3 \\ x+2y+6z=6\cdot 8 \\ 13x+2y+6z=6\cdot 24 \end{cases}$$

чие решение е: $x=8, y=5, z=5$. Според тоа, во првиот сад имало $8\ l$ вода, а во вториот и третиот- по $5\ l$ вода.

Втор начин. По третото прелевање во секој сад имало по $6l$ и како во третото прелевање од третиот сад е одлеана една четвртина од водата, заклучуваме дека преостанатите $6l$ се три четвртини од водата, односно во третиот сад пред третото прелевање имало $\frac{4}{3}\cdot 6=8l$, а во првиот сад имало $6-\frac{1}{4}\cdot 8=4l$. Овие $4l$ во првиот сад се половина од водата која од првиот сад била на почетокот, што значи дека на почетокот во првиот сад имало $2\cdot 4=8l$. По второто прелевање во вториот сад имало $6l$ и како од него е одлеана една третина од водата, во него останале две третини од водата што значи дека се одлеани $3l$. Според тоа, пред второто прелевање во вториот сад имало $6+3=9l$, а во третиот сад имало $8-3=5l$ вода. Конечно, во првото прелевање во вториот сад се ставени $4l$, што значи дека на почетокот во него имало $9-4=5l$.

Според тоа, во првиот сад имало $8\ l$ вода, а во вториот и третиот- по $5\ l$ вода.

II година

1. Да се најдат сите природни броеви n, такви што бројот

$$1!+2!+3!+...+n!$$

да е полн квадрат. (Притоа: $k!=1\cdot 2\cdot ...\cdot k$, $1!=1$)

Решение. Од тоа што $5!=120$ заклучуваме дека $n!$ завршува на нула за секој $n\geq 5$. Според тоа, бројот $1!+2!+3!+...+n!$ завршува на 3 за $n\geq 5$, (бидејќи бројот $1!+2!+3!+4!=33$ завршува на 3). Ако еден број завршува на 3, тогаш тој број не е квадрат на ниту еден број, бидејќи квадратот на било кој број завршува или на 1, или на 4, или на 5, или на 6, или на 9, или на 0. Значи, за ниту еден природен број $n\geq 5$ бројот $1!+2!+3!+...+n!$ не е полн квадрат. Останува да се испита дали за некој природен број $n\leq 4$ бројот $1!+2!+3!+...+n!$ е полн квадрат. Притоа:

- за $n=1$, $1!+2!+3!+...+n!=1=1^2$
- за $n=2$, $1!+2!+3!+...+n!=1!+2!=3$,
- за $n=3$, $1!+2!+3!+...+n!=1!+2!+3!=9=3^2$
- за $n=4$, $1!+2!+3!+...+n!=1!+2!+3!+4!=33$

Значи, единствени природни броеви n за кои бројот $1!+2!+3!+...+n!$ е полн квадрат на некој природен број се 1 и 3.

2. Да се пресмета збирот

$$\sum_{k=1}^{n} i^k ,$$

каде што n е природен број, а i е имагинарна единица.

Решение. Да воочиме дека

$$i^{4s}=(i^4)^s=1^s=1$$

$$i^{4s+1}=(i^4)^s i=1^s i=1\cdot i=i$$

$$i^{4s+2}=(i^4)^s i^2=1^s i^2=1\cdot(-1)=-1$$

$$i^{4s+3}=(i^4)^s i^3=1^s i^3=1\cdot(-i)=-i ,$$

и затоа за збирот

$$\sum_{k=1}^{n} i^k=i+i^2+i^3+i^4+...+i^n$$

а) за $n=4s$ имаме

$$i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4s}=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+...+(i-1-i+1)=0$$

б) за $n=4s+1$ имаме

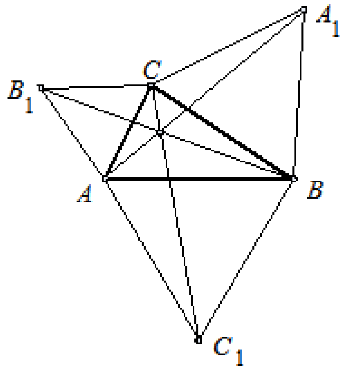
$$i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4s}+i^{4s+1}=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+...+(i-1-i+1)+i=i$$

в) за $n=4s+2$ имаме

$$i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4s}+i^{4s+1}+i^{4s+2}=(i-1-i+1)+...+(i-1-i+1)+i-1=i-1$$

г) за $n=4s+3$ имаме

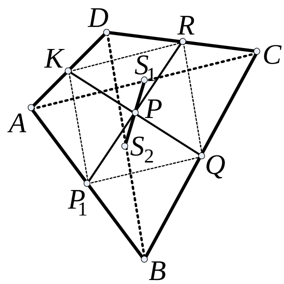
$$i+i^2+i^3+i^4+...+i^{4s}+i^{4s+1}+i^{4s+2}+i^{4s+3}=(i-1-i+1)+...+(i-1-i+1)+i-1-i=-1.$$



3. Над страните BC, CA и AB од еден произволен триаголник ABC, надвор од него, конструирани се рамнострани триаголници BCA_1, CAB_1 и ABC_1. Да се докаже дека со отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 може да се формира рамностран триаголник.

Решение. Од условот (види цртеж) следува дека $\overline{B_1C}=\overline{AC}$, $\overline{CA_1}=\overline{BC}$, $\measuredangle ACA_1=60^\circ+\measuredangle ACB$, $\measuredangle BCB_1=60^\circ+\measuredangle ACB$, што значи $\measuredangle ACA_1=\measuredangle BCB_1$. Според тоа, $\triangle BB_1C\cong\triangle AA_1C$, од каде што добиваме дека $\overline{BB_1}=\overline{AA_1}$. На ист начин се покажува дека $\triangle CBC_1\cong\triangle ABA_1$, од каде што следува дека $\overline{CC_1}=\overline{AA_1}$. Со тоа покажавме дека $\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$, т.е. со отсечките $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ може да се конструира рамностран триаголник.

4. Нека S_1 и S_2 се средините на дијагоналите на еден произволен четириаголник $ABCD$. Да се докаже дека отсечката S_1S_2 минува низ пресекот P на средните линии на $ABCD$ и дека P е средина на отсечката S_1S_2.



Решение. Прво ќе покажеме дека средишните точки на страните на произволен четириаголник се темиња на паралелограм (види цртеж). Од тоа што P_1Q е средна линија на триаголникот ABC добиваме $\overline{P_1Q}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $P_1Q\parallel AC$, а од тоа што KR е средна линија на триаголникот ACD добиваме $\overline{KR}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $KR\parallel AC$. Според тоа, $\overline{P_1Q}=\overline{KR}$ и $P_1Q\parallel KR$. Аналогно се покажува дека $\overline{P_1K}=\overline{QR}$ и $P_1K\parallel QR$.

Бидејќи четириаголникот P_1QRK е паралелограм, неговите дијагонали се преполовуваат. Од тоа што RS_1 е средна линија на $\triangle ADC$ добиваме дека $\overline{RS_1}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ и $RS_1\parallel AD$, а пак од тоа што P_1S_2 е средна линија на $\triangle ABD$ се добива $\overline{P_1S_2}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ и $P_1S_2\parallel AD$. Значи, добиваме дека $\overline{RS_1}=\overline{P_1S_2}$ и $RS_1\parallel P_1S_2$. Следствено, четириаголникот $P_1S_2RS_1$ е паралелограм, а бидејќи S_1S_2 и P_1R се негови дијагонали, тие се преполовуваат, што значи, P е средина на отсечката S_1S_2.

III година

1. Да се реши равенката

$$(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x+(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=6\,.$$

Решение. Ако во равенката наместо $\sqrt{8-\sqrt{3}}$ ставиме $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$ ќе добиеме еквивалентна равенка

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^{2x}-6(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+1=0\,.$$

Ако ставиме $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=y$, ќе ја добиеме следнава квадратна равенка

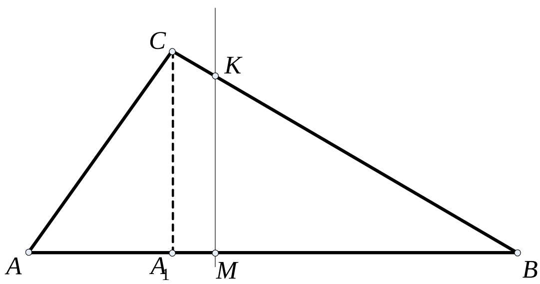
$$y^2-6y+1=0\,,$$

чии решенија се $y=3+2\sqrt{2}$ и $y=3-2\sqrt{2}$. Од $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=3+2\sqrt{2}$ се добива $x=2$, а од $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=(3+2\sqrt{2})^{-1}$, се добива $x=-2$.

Значи, равенката има две решенија $x_1=2$ и $x_2=-2$.

2. Во триаголникот ABC, висината h_c ја дели страната AB на делови p и q. На страната AB е повлечена нормала, којашто го дели триаголникот ABC на два дела со еднакви плоштини. Нека M е пресечна точка на таа нормала со AB. Да се определат $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$.

Решение. Од претпоставките на задачата имаме $\triangle A_1BC\sim\triangle MBK$ (види цртеж). Навистина и двата триаголници се правоаголни и имаат еден заеднички агол кај темето B.



Од сличноста на триаголниците се добива следната пропорција

$$\overline{CA_1}:\overline{KM}=\overline{A_1B}:\overline{MB}\,,$$

од каде што се добива

$$\overline{KM}=\frac{h_c\overline{MB}}{q}\,. \qquad (1)$$

Бидејќи плоштината на четириаголникот $AMKC$ е еднаква на плоштината на триаголникот MBK, добиваме дека плоштината P на триаголникот ABC е

$$P=2\cdot\tfrac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{KM}=\overline{MB}\cdot\overline{KM}\,. \qquad (2)$$

Од друга страна за плоштината P на триаголникот ABC важи

$$P=\tfrac{1}{2}(p+q)h_c \tag{3}$$

Равенствата (1), (2) и (3) го даваат следното равенство

$$\tfrac{1}{2}(p+q)h_c=\overline{MB}\frac{h_c\overline{MB}}{q}. \tag{4}$$

Користејќи го равенството (4) и очигледното равенство $\overline{AM}=\overline{AB}-\overline{MB}$, се добива

$$\overline{BM}=\sqrt{\tfrac{q(p+q)}{2}},\ \overline{AM}=p+q-\sqrt{\tfrac{q(p+q)}{2}}.$$

3. Да се реши равенката

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=1. \tag{1}$$

Решение. Користејќи ја формулата

$$\sin^2\alpha=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

равенката (1) се трансформира во

$$2-\cos 2x-\cos 4x+2\cos^2 3x=2, \tag{2}$$

а потоа, имајќи предвид дека

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2},$$

од (2) добиваме

$$-2\cos 3x\cos x+2\cos^2 3x=0,$$

т.е.

$$(-\cos x+\cos 3x)\cos 3x=0. \tag{3}$$

Бидејќи $\cos 3x-\cos x=-2\sin 2x\sin x$, равенката (3) го добива видот

$$\sin x\sin 2x\cos 3x=0,$$

па затоа

$$\sin x=0,\ \sin 2x=0,\ \cos 3x=0. \tag{4}$$

Решенијата на првата, втората, третата равенка од (4) се соодветно:

$$x=k\pi,\ x=k\tfrac{\pi}{2},\ x=(2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z}), \tag{5}$$

па тоа се сите решенија на дадената равенка (1).

4. Иста како задачата 1 од четврта година.

IV година

1. Да се докаже дека еден цел број c може да се претстави како збир на квадрати на два цели броја ако и само ако бројот $2c$ го има истото својство.

Решение. Нека бројот c може да се претстави како збир на од квадратите на два цели броја x и y, т.е. $c=x^2+y^2$. Броевите $x-y$ и $x+y$ се цели и користејќи го очигледното равенство $(x-y)^2+(x+y)^2=2c$, заклучуваме дека и бројот $2c$ е збир од квадратите на два цели броја.

Обратно, нека $2c=a^2+b^2$ за некои цели броеви a и b. Бидејќи бројот a^2+b^2 е парен, следува дека или a^2 е парен и b^2 е парен, или a^2 е непарен и b^2 е непарен. Квадратот на било кој парен број е парен, и квадратот на било кој непарен број е непарен, па заклучуваме дека a и b се парни броеви, или a и b се непарни броеви. Разликата и збирот на парни (непарни) броеви е парен број. Затоа $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$ се цели броеви. Користејќи го овој резултат и претпоставката $2c=a^2+b^2$ добиваме

$$(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{2(a^2+b^2)}{4}=\frac{2\cdot 2c}{4}=c,$$

Значи, и бројот c е збир на квадратите на два цели броја.

2. Нека ψ е пермутација на множеството $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ каде што $a_1,a_2,$ $a_3,...,a_n$ се дадени позитивни реални броеви. Да се докаже дека

$$\frac{a_1}{\psi(a_1)}+\frac{a_2}{\psi(a_2)}+....+\frac{a_n}{\psi(a_n)}\geq n$$

Решение. Од тоа што ψ е пермутација на множеството $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ заклучуваме дека

$$a_1a_2a_3...a_n=\psi(a_1)\psi(a_2)\psi(a_3)...\psi(a_n).$$

Користејќи дека аритметичката средина на ненегативни реални броеви е поголема или еднаква на нивната геометриска средина, го добиваме неравенството

$$\frac{1}{n}(\frac{a_1}{\psi(a_1)}+\frac{a_2}{\psi(a_2)}+....+\frac{a_n}{\psi(a_n)})\geq\sqrt[k]{\frac{a_1}{\psi(a_1)}\cdot\frac{a_2}{\psi(a_2)}\cdot....\cdot\frac{a_n}{\psi(a_n)}}=\sqrt[k]{1}=1$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство.

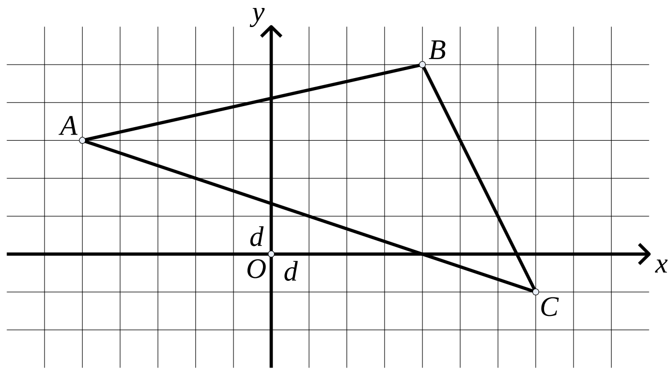
3. Да се докаже дека рамностран триаголник не може да се впише во квадратна мрежа, така што темињата на триаголникот да лежат во пресеците на хоризонталните и вертикалните линии на мрежата.

Решение. Нека вертикалните линии од мрежата се паралелни со ординатната оска, а хоризонталните линии од мрежата се паралелни со апсцисната оска во еден правоаголен Декартов координатен систем. Да претпоставиме дека во таа мрежа може да се впише рамностран триаголник чии темиња се во пресеците на хоризонталните и вертикалните линии во мрежата (види цртеж).

Нека $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$. Јасно, дека постојат цели броеви $a_1,a_2,$ a_3, b_1,b_2,b_3, такви што

$$x_i=a_id,\ \ y_i=b_id\quad(i=1,2,3),$$

каде што d е означено растојанието меѓу хоризонталните (вертикалните) линии (види цртеж).



Од познатата формула, за плоштината P на триаголникот ABC добиваме

$$P=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)],$$

т.е.

$$P=\frac{d^2}{2}[a_1(b_2-b_3)+a_2(b_3-b_1)+a_3(b_1-b_2)]. \qquad (1)$$

Од друга страна, од $P=\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$, каде што $c^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, добиваме

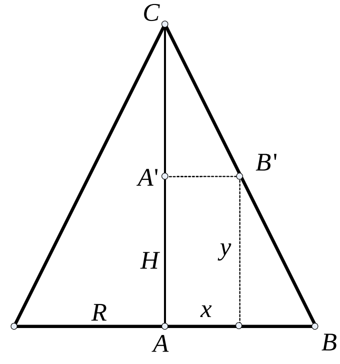
$$P=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}[(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2]. \qquad (2)$$

Ако ги споредиме равенствата (1) и (2), ќе добиеме

$$a_1(b_2-b_3)+b_2(b_3-b_1)+a_3(b_1-b_2)=\frac{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}{2}\cdot\sqrt{3} \qquad (3)$$

што не е можно, бидејќи левата страна од равенството (3) е рационален број, а десната страна од тоа равенство е ирационален број (производ од рационален број различен од нула и ирационален број е ирационален број).

4. Во даден кружен конус, со висина H и радиус на основата R впишан е цилиндар со максимален волумен. Во цилиндарот е впишан конус и во тој конус пак е впишан цилндар со максимален волумен, итн (основите на цилиндрите и конусите се во иста рамнина). Да се најде сумата на волумените на вписаните цилиндри.



Решение. Да го означиме со x радиусот на основата на впишаниот цилиндар, а со y негова-та висина. Јасно е дека $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ (види цртеж; двата триаголници имаат еден заеднички остар агол и двата се правоаголни). Од нивната сличност се добива

$$x=\frac{R}{H}(H-y). \qquad (1)$$

Го бараме оној цилиндар којшто има максимален волуме $V=\pi x^2 y$, т.е. ќе најдеме за кој y функцијата

$$\Phi(y)=\frac{R^2}{H^2}(H-y)^2 y$$

има максимална вредност. Од

$$\Phi'(y)=\pi\frac{R^2}{H^2}[2(H-y)(-1)y+(H-y)^2]=0,$$

ја добиваме равенката

$$3y^2-4Hy+H^2=0,$$

чии решенија се $y_1=H$ и $y_2=\frac{H}{3}$. Поради

$$\Phi''(y)=\pi\frac{R^2}{H^2}[2(-1)(-1)y+2(H-y)(-1)+2(H-y)(-1)=\pi\frac{R^2}{H^2}(-4H+6y),$$

имаме

$$\Phi''(y_1)=\pi\frac{R^2}{H^2}2H>0,$$

што значи дека $\Phi(y_1)$ е минимум на функцијата $\Phi(y)$ (цилиндарот дегенерира во висината на конусот), а $\Phi''(y_2)=\pi\frac{R^2}{H^2}(-2H)<0$, што значи дека за $y=\frac{H}{3}$ се добива дека максимум на $\Phi(y)$. За ова вредност на y, од равенството (1) добиваме $x=\frac{2}{3}R$ и максималниот волумен ќе биде

$$\Phi(y_1)=4\pi\frac{R^2H}{27}.$$

Ако сега, во добиениот цилиндар впишеме конус (висината на тој конус е висината на цилиндерот, $\frac{H}{3}$, а радиусот на основата на конусот е радиусот на основата на цилиндарот, $\frac{2}{3}R$) и во тој конус впишеме цилиндар со максимален волумен, тогаш висината на нововпишаниот цилиндар ќе биде $\frac{1}{3}(\frac{H}{3})=\frac{1}{3^2}H$, а радиусот на неговата основа ќе биде

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}R=(\frac{2}{3})^2R,$$

додека неговиот волумен е $\pi R^2H(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^2$; третиот впишан цилиндар ќе има висина $(\frac{1}{3})^3H$, радиус на основата $(\frac{2}{3})^3R$ и волумен $\pi R^2H(\frac{2}{3})^6(\frac{1}{3})^3$ и аналогно, за секој нареден впишан цилиндар. На овој начин добиваме една низа броеви (волумени) која претставува геометриска низа со количник $q=\frac{4}{27}<1$ и затоа сумата на бескрајниот геометриски ред ќе биде

$$\frac{4\pi R^2H\frac{1}{27}}{1-\frac{4}{27}}=\frac{4}{23}\pi R^2H.$$