Jensenova i kvadratna funkcijska jednadžba

Bojana Harambašić[1] *i Dijana Ilišević*[2], *Zagreb*

Funkcijske jednadžbe su, jednostavnim riječima, jednadžbe u kojima su nepoznanice funkcije. Ovdje sve nepoznate funkcije imaju domenu $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{C}$ i kodomenu $\mathbf{C}$, pri čemu skup $\mathcal{D}$ ima ova svojstva:

(i) $0 \in \mathcal{D}$,

(ii) $x, y \in \mathcal{D} \implies x + y \in \mathcal{D}$,

(iii) $x \in \mathcal{D} \implies -x \in \mathcal{D}$.

Primjerice, za $\mathcal{D}$ se mogu uzeti $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ ili $\mathbf{Z}$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D} \tag{1}$$

naziva se *Jensenova funkcija*, a funkcijska jednadžba (1) naziva se *Jensenova funkcijska jednadžba*. Ako domena $\mathcal{D}$ ima i svojstvo da $x \in \mathcal{D}$ povlači $\frac{1}{2}x \in \mathcal{D}$ (primjerice, ako se za $\mathcal{D}$ uzme $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{Q}$), tada se Jensenova funkcijska jednadžba može zapisati i u ekvivalentnom obliku

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Naime, (2) se dobije iz (1) ako se tamo umjesto x stavi $\frac{1}{2}(x+y)$ i umjesto y, $\frac{1}{2}(x-y)$, a (1) se dobije iz (2) ako se u (2) umjesto x stavi $x+y$ i umjesto y stavi $x-y$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D} \tag{3}$$

naziva se *kvadratni funkcional*, a funkcijska jednadžba (3), *kvadratna funkcijska jednadžba*.

Za funkciju $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ kažemo da je *aditivna* ako je

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}.$$

Uvrštavanjem $x = y = 0$ zaključujemo $f(0) = 0$.

Za funkciju $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ kažemo da je *biaditivna* ako je aditivna i u prvoj i u drugoj varijabli tj. ako je

$$g(x+y, z) = g(x, z) + g(y, z) \quad \text{i} \quad g(x, y+z) = g(x, y) + g(x, z)$$

za sve $x, y, z \in \mathcal{D}$, a *simetrična* ako je

$$g(y, x) = g(x, y) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}.$$

Cilj nam je dokazati da se proučavanje Jensenove i kvadratne funkcijske jednadžbe (kao i nekih njima srodnih) svodi na proučavanje aditivnih i simetričnih biaditivnih funkcija.

Teorem 1. *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava Jensenovu funkcijsku jednadžbu. Tada postoje jedinstvena aditivna funkcija $g : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i jedinstven $c \in \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x) + c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.*

Dokaz. Međusobnom zamjenom varijabli x i y u (1) dobije se

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(y) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}. \tag{4}$$

[1] Apsolventica na PMF-Matematičkom odjelu u Zagrebu.

[2] Docentica na PMF-Matematičkom odjelu u Zagrebu.

Ako je f neparna funkcija, zbrajanjem (1) i (4), a zatim dijeljenjem s 2, zaključujemo da je f aditivna funkcija.

Ako je f parna funkcija, tada oduzimanjem (4) od (1) i dijeljenjem s 2 zaključujemo da je $f(x) = f(y)$ za sve $x, y \in \mathcal{D}$ tj. f je konstantna funkcija.

Neka je $g : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija definirana s $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ za svaki $x \in \mathcal{D}$, a $h : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija definirana s $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada funkcije g i h zadovoljavaju Jensenovu funkcijsku jednadžbu; g je neparna, a h parna i vrijedi $f(x) = g(x) + h(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Prema dokazanom, g je aditivna, a h konstantna funkcija (stoga postoji $c \in \mathbf{C}$ takav da je $h(x) = c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$).

Preostaje dokazati da su takva funkcija g i takva konstanta c jedinstvene. Neka su aditivna funkcija $g_0 : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i $c_0 \in \mathbf{C}$ takvi da je $f(x) = g_0(x) + c_0$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada je $g(x) - g_0(x) = c_0 - c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Posebno za $x = 0$ imamo $c_0 - c = g(0) - g_0(0)$. No, g i g_0 su aditivne funkcije, pa je $g(0) = g_0(0) = 0$ i stoga $c_0 = c$. Slijedi $g(x) = g_0(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. $\square$

Teorem 2. *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Tada postoji jedinstvena simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x, x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.*

Dokaz. Iz (3) se posebno za $y = 0$ dobije $f(0) = 0$, a za $y = x$, $f(2x) = 4f(x)$. Neka je $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija definirana s

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(f(x + y) - f(x) - f(y)) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}.$$

Tada je $g(x, x) = \frac{1}{2}(f(2x) - 2f(x)) = f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Očigledno je $g(y, x) = g(x, y)$ za sve $x, y \in \mathcal{D}$. Nadalje, primjenom (3) nekoliko puta, imamo

$$\begin{aligned}
&4(g(x, z) + g(y, z)) \\
&\quad = 2(f(x + z) - f(x) - f(z) + f(y + z) - f(y) - f(z)) \\
&\quad = (2f(x + z) + 2f(y)) + (2f(x) + 2f(y + z)) - 4(f(x) + f(y) + f(z)) \\
&\quad = (f(x+y+z) + f(x-y+z)) + (f(x+y+z) + f(x-y-z)) - 4(f(x)+f(y)+f(z)) \\
&\quad = 2f(x + y + z) + (f(x - y + z) + f(x - y - z)) - 4(f(x) + f(y) + f(z)) \\
&\quad = 2f(x + y + z) + (2f(x - y) + 2f(z)) - 4(f(x) + f(y) + f(z)) \\
&\quad = 2(f(x + y + z) + f(x - y) - 2f(x) - 2f(y) - f(z)) \\
&\quad = 2(f(x + y + z) - f(x + y) - f(z)) \\
&\quad = 4g(x + y, z).
\end{aligned}$$

Dakle, $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$ za sve $x, y, z \in \mathcal{D}$. Obzirom da je g simetrična funkcija, izravno slijedi $g(x, y + z) = g(x, y) + g(x, z)$ za sve $x, y, z \in \mathcal{D}$.

Neka je sada $g_0 : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ simetrična biaditivna funkcija sa svojstvom $f(x) = g_0(x, x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada je $g_0(x, x) = g(x, x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Uvrstimo li u tu jednadžbu $x + y$ umjesto x, nakon sređivanja (primjenjujući biaditivnost funkcija g i g_0) dolazimo do

$$g_0(x, y) + g_0(y, x) = g(x, y) + g(y, x) \quad \text{za sve } x, y \in \mathcal{D}.$$

Obzirom da su i g i g_0 simetrične, dobivamo $g_0(x, y) = g(x, y)$ za sve $x, y \in \mathcal{D}$. Dakle, simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x, x)$, za svaki $x \in \mathcal{D}$, je jedinstvena. $\square$

Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y) \quad \text{za sve } x,y\in\mathcal{D}. \tag{5}$$

Ako jednadžbi (5) dodamo zahtjev da je f neparna, ona prelazi u Jensenovu, a uz dodatni zahtjev da je f parna, jednadžba (5) prelazi u kvadratnu funkcijsku jednadžbu. Poznavanje strukture rješenja Jensenove i kvadratne funkcijske jednadžbe omogućuje nam određivanje strukture rješenja funkcijske jednadžbe (5).

Teorem 3. *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu* (5). *Tada postoji jedinstvena simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D}\times\mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i jedinstvena aditivna funkcija $h : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x,x) + h(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.*

Dokaz. Ako je f neparna funkcija, ona zadovoljava Jensenovu funkcijsku jednadžbu, pa teorem 1 povlači egzistenciju aditivne funkcije $k : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ i konstante $c \in \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = k(x) + c$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Stavimo li $x = y = 0$ u (5), zaključujemo $f(0) = 0$. Kako je k aditivna, to je i $k(0) = 0$. Slijedi $c = 0$. Dakle, $f(x) = k(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$ i stoga je f aditivna funkcija.

Ako je f parna funkcija, tada zadovoljava kvadratnu funkcijsku jednadžbu, pa teorem 2 povlači egzistenciju simetrične biaditivne funkcije $g : \mathcal{D}\times\mathcal{D} \to \mathbf{C}$ sa svojstvom $f(x) = g(x,x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

Definirajmo funkcije $f_1, f_2 : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ s $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ i $f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Funkcije f_1 i f_2 zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu (5), f_1 je neparna, a f_2 parna i $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Prema dokazanom, f_1 je aditivna te postoji simetrična biaditivna funkcija $g : \mathcal{D}\times\mathcal{D} \to \mathbf{C}$ takva da je $f_2(x) = g(x,x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Dovoljno je staviti $h(x) = f_1(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$, odakle dobivamo $f(x) = g(x,x) + h(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$.

Neka je funkcija $g_0 : \mathcal{D}\times\mathcal{D} \to \mathbf{C}$ simetrična i biaditivna, funkcija $h_0 : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ aditivna i $f(x) = g_0(x,x) + h_0(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Tada je

$$h(x) - h_0(x) = g_0(x,x) - g(x,x) \quad \text{za svaki } x \in \mathcal{D},$$

odakle se uvrštavanjem $x + y$ umjesto x i sređivanjem (koristeći aditivnost funkcija h, h_0 i biaditivnost funkcija g, g_0) dobije

$$g_0(x,y) + g_0(y,x) = g(x,y) + g(y,x) \quad \text{za sve } x,y \in \mathcal{D}.$$

Kako su g i g_0 simetrične, slijedi $g_0(x,y) = g(x,y)$ za sve $x,y \in \mathcal{D}$. Stoga je i $h(x) = h_0(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}$. Dobiveni prikaz funkcije f je, dakle, jedinstven. $\square$

Na kraju napomenimo da se, unatoč svojoj jednostavnosti, funkcijske jednadžbe, ovdje proučavane, pojavljuju (najčešće uz neke dodatne uvjete) u raznim područjima matematike koja nadilaze srednjoškolske okvire te su i danas predmet zanimanja brojnih matematičara.

Literatura

1 D. Ilišević, *Quadratic functionals on modules over $*$-rings*, Studia Sci. Math. Hungar. **42** (2005), 95–105.

2 Pl. Kannappan, *On quadratic functional equation*, Internat. J. Math. & Statist. Sci. **9** (2000), 35–60.

3 S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. **19** (1964), 23–36.