JMMO 2021

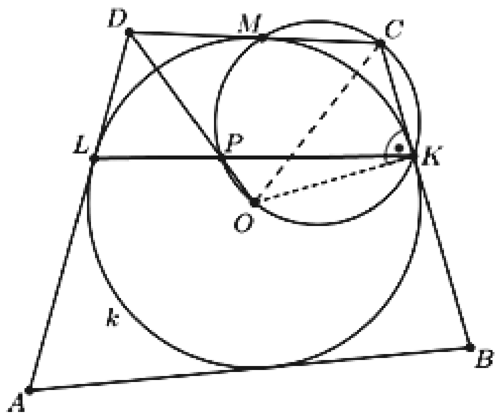
1. На овогодишната JMMO некои од учениците се познаваат (познанството е симетрична релација), но постојат и ученици кои што не се познаваат. При произволно распоредување на учениците во две простории секогаш може да се најдат познаници сместени во различни простории. Нека A е произволен натпреварувач. Докажи дека постојат натпреварувачи B и C такви што во тројката $\{A,B,C\}$ има точно две познанства.

   Решение. Разгледуваме два случаја.

   Случај 1. Натпреварувачот A ги познава сите учесници на JMMO. Според условот постојат натпреварувачи B и C кои не се познаваат и како A ги познава сите натпреварувачи заклучуваме дека $A \notin \{B,C\}$. Оттука следува дека во тројката $\{A,B,C\}$ има точно две познанства.

   Случај 2. Натпреварувачот A не ги познава сите учесници на JMMO. Да го разгледаме распоредот во кој во една од просториите се сместени A и сите негови познаници, а во другата просторија се сместени сите уечесници на JMMO со кои A не се познава. Според условот на задачата постојат познаници B и C кои се сместени во различни простории. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека B во истата просторија со A, а C е во другата простпорија. Тогаш A и B се познаници, A и C не се познаници, а B и C се познаници. Конечно, во тројката $\{A,B,C\}$ има точно две познанства.

2. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник и $k(O,r)$ е неговата впишана кружница, која ги допира страните BC и AD во точките K и L, соодветно. Докажи дека кружницата со дијаметар OC минува низ пресекот на правите KL и OD.

   Решение. Правата KC е тангента на k, па затоа важи

   $$\measuredangle KOL = 2\measuredangle LKC. \qquad (1)$$

   Понатаму, ако M е допирната точка на CD со k, тогаш $\triangle LOD \cong \triangle MOD$ и $\triangle KOC \cong \triangle MOC$, па затоа точни се равенствата

$$\measuredangle KOL = \measuredangle KOM + \measuredangle LOM = 2\measuredangle COM + 2\measuredangle MOD = 2\measuredangle COD. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\measuredangle COP = \measuredangle COD = \measuredangle LKC = \measuredangle CKP$, што значи дека точките C, O, P, K се конциклични, т.е. припаѓаат на иста кружница k'. Конечно, од $\measuredangle OKC = 90^\circ$ следува дека OC е дијаметар на k', што и требаше да се докаже.

3. Определи ги сите природни броеви n и сите прости броеви p такви што

$$17^n \cdot 2^{n^2} - p = n^2(2^{n^2+3} + 2^{n^2} - 1).$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во видот

$$(17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2 = p. \qquad (1)$$

За $n = 1$ имаме $p = 17$ и тоа е прост број, па затоа парот $(n, p) = (1,17)$ е едно решение на задачата.

Нека $n > 1$. Со математичка индукција лесно се докажува дека во тој случај $17^n - 9n^2 \geq 1$, па затоа $(17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2 > 2$, односно $p > 2$. Според тоа, $p = (17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2$ е непарен број, што значи дека n е непарен број. Затоа $n^2 = 4k(k+1) + 1 = 8t + 1$, за некој $t \in \mathbb{N}$. Сега, ако искористиме дека $2^8 \equiv 1 (\mathrm{mod} 17)$, добиваме

$$\begin{aligned}(17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2 &\equiv (-9)n^2 \cdot 2^{n^2} + n^2 \\ &= (-9)n^2 \cdot 2^{8t+1} + n^2 \\ &= (-18)n^2 \cdot (2^8)^t + n^2 \\ &\equiv (-18)n^2 + n^2 \\ &= -17n^2 \equiv 0 (\mathrm{mod} 17)\end{aligned}$$

Според тоа, за $n > 1$ левата страна на (1) е делива со 17, па како p е прост број заклучуваме дека $p = 17$. Но, тогаш за $n \geq 2$ добиваме

$$(17^n - 9n^2) \cdot 2^{n^2} + n^2 \geq 1 \cdot 2^4 + 4 = 20 > 17 = p,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои решение такво што $n > 1$, т.е. $(n, p) = (1,17)$ е единствено решение на задачата.

4. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{24}{4}$.

Докажи го неравенството:

$$\frac{a^3+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^3+a^2}{c^2+a^2}\geq\frac{5}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Прво ќе докажеме дека за секој $t>0$ важи

$$t^3-t^2\geq-\frac{4}{27}. \qquad (2)$$

Навистина, за секој $t>0$ е точн неравенството

$$(t+\tfrac{1}{3})(t-\tfrac{2}{3})^2\geq 0,$$

кое е еквивалентно со неравенствот (1).

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a^2+b^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\geq(1+1)^2=4,$$

односно

$$\frac{1}{a^2+b^2}\leq\frac{1}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}).$$

Слично се докажува дека

$$\frac{1}{b^2+c^2}\leq\frac{1}{4}(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$$

и

$$\frac{1}{c^2+a^2}\leq\frac{1}{4}(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}).$$

Со собирање на последните три неравенства, ако го искористиме условот $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{24}{4}$, добиваме

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\leq\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})=\frac{27}{8}.$$

Понатаму, од последното неравенство и неравенството (2), добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^3+a^2}{c^2+a^2}&=\frac{a^3-a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^3-b^2}{b^2+c^2}+\frac{c^3-c^2}{c^2+a^2}+3\\&\geq 3-\frac{4}{27}(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2})\\&\geq 3-\frac{4}{27}\cdot\frac{27}{8}=\frac{5}{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

5. Нека ABC е остроаголен триаголник и нека X и Y се точки на страните AB и AC такви што $\overline{BX}=\overline{CY}$. Нека I_B и I_C се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABY и ACX, соодветно, а T е точка во која по втор пат се сечат опишаните кружници околу три-

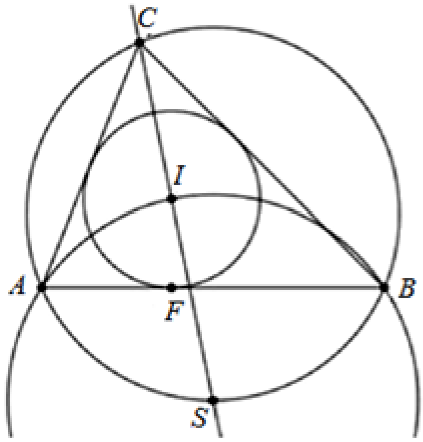
аголниците ABY и ACX .Докажи го равенството

$$\frac{\overline{TI_B}}{\overline{TI_C}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{CX}}.$$

Решение. *Лема*. Нека I е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC, а k е опишаната кружница околу тиаголникот ABC и нека правата CI по втор пат ја сече кружницата k во точката S. Тогаш S е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABI .

Доказ. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle SAI &= \measuredangle SAB + \measuredangle BAI\\ &= \measuredangle SCB + \measuredangle BAI\\ &= \measuredangle ACI + \measuredangle IAC\\ &= \measuredangle AIS.\end{aligned}$$

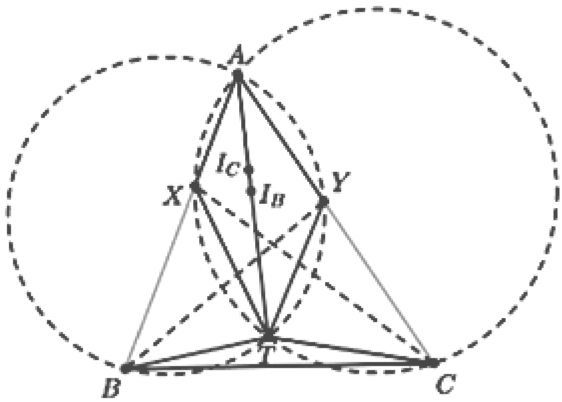


Значи, $\triangle IAS$ е рамнокрак и важи $\overline{SA} = \overline{SI}$. Слично се докажува дека $\triangle ABS$ е рамнокрак и $\overline{SB} = \overline{SI}$. Сега од

$$\overline{SA} = \overline{SI} = \overline{SB}$$

следува тврдењето на лемата. ■

Да се вратиме на задачата. Со S да ја означиме втората пресечна точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ со опишаната кружница околу $\triangle ABY$. Од условот на задачата имаме $\overline{BX} = \overline{CY}$, од лемата следува $\overline{SB} = \overline{SY}$ и важи $\measuredangle SBX = \measuredangle SBA = 180^\circ - \measuredangle SYA = \measuredangle SYC$, па затоа $\triangle SBX \cong \triangle SYC$. Сега, од складноста следува $\measuredangle XSB = \measuredangle CSY$, па затоа



$$\measuredangle CSX = \measuredangle CSY + \measuredangle YSX = \measuredangle XSB + \measuredangle YSX = \measuredangle BSY$$

и

$$\measuredangle BSY + \measuredangle BAY = \measuredangle CSX + \measuredangle CAX = 180^\circ . \qquad (1)$$

Од (1) следува дека точките B, S, Y, A се конциклични. Тоа значи $S \equiv T$. Според тоа, точките B, Y, I_B припаѓаат на кружница со центар во точката T и раиус $\overline{TB} = \overline{TY} = \overline{TI_B} = r_B$ и аналогно точките C, X, I_C припаѓаат на кружница со центар во точката T и раиус $\overline{TC} = \overline{TX} = \overline{TI_C} = r_C$. Понатаму, триаголниците BTY и CTX се рамнокраки со агол при врвот $\measuredangle BTY = 180^\circ - \measuredangle BAC = \measuredangle CTX$, па затоа $\triangle BTY \sim \triangle CTX$. Од сличноста следува

$$\frac{\overline{BY}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{CT}} = \frac{r_B}{r_c} = \frac{\overline{TI_B}}{\overline{TI_C}},$$

што и требаше да се докаже.