О бројевима палиндромима

Ратко Тошић, Нови Сад

Речи које гласе исто кад се читају и унапред и уназад називају се *палиндроми*. На пример, следеће речи су палиндроми: ОКО, ПОП, АДА, НЕВЕН, ПОТОП, РОТОР, ТЕРЕТ, НЕРАЖАРЕН. И целе реченице могу бити палиндроми. На пример:

АНА ВОЛИ МИЛОВАНА.
ПЕРИЦА РЕЖЕ РАЦИ РЕП.
СИР ИМА МИРИС.
У РИМУ УМИРУ.
САВА ЗИДАР ГРАДИ ЗА ВАС.
И РУЖАМА МАМА ЖУРИ.
УДОВИЦА БАЦИ ВОДУ.

Слично за неки број кажемо да је палиндром ако се он не мења при исписивању његових цифара обрнутим редом. На пример, бројеви 5, 44, 323, 1991, 2002, 111111, 123454321 су палиндроми. Често се за бројеве палиндроме користи и назив *симетрични* бројеви.

Задатак 1. Колико има природних бројева палиндрома мањих од милион?

Решење: Палиндром је одређен првом половином свог записа ако је број његових цифара паран. Другим речима, ако је број цифара $2k$, онда је он одређен са првих k цифара, јер се остале цифре добијају исписивањем првих k цифара обрнутим редом. Према томе, број палиндрома са $2k$ цифара једнак је броју k-цифрених природних бројева. Слично, палиндром са $2k+1$ цифара је одређен са првих $k+1$ цифара, тј. једнак је броју $(k+1)$-цифрених бројева. Сада лако налазимо да има 9 једноцифрених палиндрома, 9 двоцифрених, 90 троцифрених, 90 четвороцифрених, 900 петоцифрених и 900 шестоцифрених. Дакле, укупан број палиндрома мањих од милион једнак је $9 + 9 + 90 + 90 + 900 + 900 = 1998$.

Често се у књигама могу наћи занимљиви примери не само са бројевима палиндромима, него и са изразима који не мењају вредност ако се у целом изразу цифре испишу обрнутим редом. На пример, $12 \cdot 42 = 24 \cdot 21$.

Задатак 2. Наћи све парове двоцифрених бројева $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ чији се збир не мења ако се израз за збир чита у обрнутом смеру, тј. за које је

$$\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{dc}+\overline{ba} \qquad (1)$$

Пример: $76 + 34 = 43 + 67$.

Решење: Како се двоцифрени бројеви могу записати у облику $\overline{ab}=10a+b$ и $\overline{cd}=10c+d$, једнакост (1) своди се на

$$(10a+b)+(10c+d)=(10d+c)+(10b+a)$$

или $9(a+c)=9(d+b)$, одакле коначно следи да је $a+c=b+d$, тј. збир првих цифара траженог пара бројева једнак је збиру њихових других цифара. Сад се лако могу пронаћи сви парови двоцифрених бројева са том особином.
На сличан начин се так задатак решава за друге рачунске операције. Размотрићемо сада аналоган задатак за троцифрене бројеве.

Задатак 3. Наћи све парове троцифрених бројева $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ такве да је

$$\overline{abc}+\overline{def}=\overline{fed}+\overline{cba}. \qquad (2)$$

Решење: Како се троцифрени бројеви могу записати у облику $\overline{abc}=100a+10b+c$ и $\overline{def}=100d+10e+f$, једнакост (2) своди се на

$$(100a+10b+c)+(100d+10e+f)=(100f+10e+d)+(100c+10b+a),$$

што је еквивалентно са $99(a+d)=99(c+f)$, одакле коначно следи да је $a+d=c+f$ тј. збир првих цифара траженог пара једнак је збиру њихових последњих (трећих) цифара. Сада се лако могу пронаћи сви парови троцифрених бројева са том особином.

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛНИ РАД

1. Колико има парова двоцифрених бројева за које важи једнакост (1)?

2. Наћи све парове двоцифрених бројева $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ за које је
   (а) $\overline{ab}-\overline{cd}=\overline{dc}-\overline{ba}$;
   (б) $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{dc}\cdot\overline{ba}$;
   (в) $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{cd}}=\dfrac{\overline{dc}}{\overline{ba}}$.
   У сваком случају одреди број таквих парова.

3. Колико има парова троцифрених бројева за које важи једнакост (2)?

4. Наћи све парове троцифрених бројева $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ за које је
$$\overline{abc}-\overline{def}=\overline{fed}-\overline{cba}.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија