XX олимпијада

1. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $n > m \geq 1$ и последните три цифри на броевите 1978^m и 1978^n (во декаден броен систем) се еднакви.
Определи ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

Решение. *Прв начин*. Според условот на задачата бројот $1978^m(1978^{n-m}-1)$ е делив со $1000 = 8 \cdot 125$. Бидејќи бројот $1978^{n-m}-1$ е непарен, а 1978 е парен добиваме

$$8 \,|\, 1978^m \quad \text{и} \quad 125 \,|\, (1978^{n-m}-1).$$

Но, $1978 = 2 \cdot 989$ па од првиот услов следува $m \geq 3$, а од вториот услов

$$1978^{n-m} \equiv (-2)^{n-m} \equiv 1 (\bmod 5).$$

Ова е можно само за $n - m = 4k$, $k \geq 1$. Останува да се определи најмалиот природен број k, таков што бројот $1978^{4k}-1$ е делив со 125. Од

$$1978^4 \equiv 6 (\bmod 125)$$

добиваме $6^k \equiv 1 (\bmod 125)$. Најмалиот таков број е 25, па решението на задачата е $m = 3$, $n = 103$.

Втор начин. *Лема* 1. Нека $\mathrm{NZD}(a, n) = 1$ и $d \in \mathbb{N}$ е најмал број, таков што $a^d \equiv 1 (\bmod n)$. Ако $a^k \equiv 1 (\bmod n)$, тогаш $d \,|\, k$.

Доказ. Нека $a^k \equiv 1 (\bmod n)$ и $k = sd + r$, каде $0 \leq r < d$. Имаме

$$a^k = (a^d)^s \cdot a^r \equiv a^r (\bmod n).$$

По претпоставка $a^k \equiv 1 (\bmod n)$, па затоа $a^r \equiv 1 (\bmod n)$. Бидеји $0 \leq r < d$ и d е најмал природен број таков што $a^d \equiv 1 (\bmod n)$, добиваме $r = 0$, т.е. $d \,|\, k$. ■

Лема 2. Најмалиот природен број $x > 0$, таков што

$$1978^x \equiv 1 (\bmod 5^n)$$

е $x = \varphi(5^n)$, каде φ е Ојлеровата функција.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Покрај тоа ќе докажеме дека $1978^x \not\equiv 1 (\bmod 5^{n+1})$, каде $x = \varphi(5^n)$.

Нека $n = 1$. Лесно се гледа дека $1978^x \equiv 3^x \not\equiv 1 (\bmod 5)$ за $x = 1, 2, 3$ и дека

$$1978^4 \equiv 3^4 \equiv 1 (\bmod 5), \text{ но } 1978^4 \equiv 3^4 \not\equiv 1 (\bmod 5^2).$$

Нека за $n = k$ бројот $x = \varphi(5^k)$ е најмалиот природен број, таков што

$$1978^x \equiv 1 (\bmod 5^k) \text{ и } 1978^x \not\equiv 1 (\bmod 5^{k+1}).$$

Природниот број y нека задоволува $1978^y \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5^{k+1})$. Од лема 1 следува $y = tx$, па затоа $1978^{tx} - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5^{k+1})$, односно

$$(1978^x - 1)(1978^{x(t-1)} + 1978^{x(t-2)} + \ldots + 1978^x + 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5^{k+1}).$$

Бидеќи $1978^x - 1$ е делив со 5^k, а не е делив со 5^{k+1} се добива

$$1978^{x(t-1)} + 1978^{x(t-2)} + \ldots + 1978^x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5)$$
$$(1978^{x(t-1)} - 1) + (1978^{x(t-2)} - 1) + \ldots + (1978^x - 1) + t \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5).$$

Броевите $1978^{xm} - 1$, $m = 1, 2, \ldots, t-1$ се деливи со 5, бидејќи $5^k \mid 1978^x - 1$ и $1978^x - 1 \mid 1978^{xm} - 1$. Според тоа, $t \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5)$. Најмалиот природен број t кој е делив со 5 е $t = 5$. Значи,

$$y = 5x = 5 \cdot \varphi(5^k) = 5 \cdot 4 \cdot 5^{k-1} = 4 \cdot 5^k = \varphi(5^{k+1})$$

и

$$1978^y \not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 5^{k+2})$$

бидејќи

$$(1978^{4x} - 1) + (1978^{3x} - 1) + (1978^{2x} - 1) + (1978^x - 1) + 5 \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, 5^2).$$

Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Со помош на горните леми ќе ја генерализираме почетната задача.

Нека m и n се природни такви што $n > m \geq 1$. Последните k цифри на бројот 1978^m се еднакви, соодветно, на последните k цифри на бројот 1978^n (во декаден запис). Определи ги m и n така што $m + n$ има најмала можна вредност.

Решение. Бројот $1978^n - 1978^m$ завршува на k нули, па затоа

$$1978^m (1978^{n-m} - 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5^k),$$

од каде што следува

$$1978^{n-m} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5^k).$$

Од лема 2 и лема 1 следува дека

$$n - m = s\varphi(5^5) = 4 \cdot 5^{k-1} s, \ (s \neq 0).$$

Исто така мора да важи

$$1978^m (1978^{n-m} - 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2^k).$$

Бидејќи $1978^{n-m} - 1$ е непарен број, следува дека $2^m \cdot 989^m \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2^k)$, од каде што следува дека $m \geq k$.

Збирот $n + m = 4 \cdot 5^{k-1} s + 2m$, при услов $m \geq k$ ќе биде најмал за $s = 1$ и $m = k$, па затоа бараните броеви се $m = k$ и $n = 4 \cdot 5^{k-1} + k = k + \varphi(5^k)$.

2. Нека P е дадена внатрешна точка на сферата S, а A, B и C се произволни точки на S такви што правите PA, PB и PC се заемно нормални. Со Q да го означиме темето на паралелопипедот определен со PA, PA, PC кое е дијагонално спротивно на темето P.
Најди го геометриското место на точката Q, за сите можни положби на точките A, B и C.

Решение. Ги воведуваме векторите $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$, каде што O е центарот на сферата. Тогаш имаме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{q} = \vec{\rho} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad (\vec{\rho} + \vec{a})^2 = (\vec{\rho} + \vec{b})^2 = (\vec{\rho} + \vec{c})^2 = R^2,$$

каде R е радиусот на сферата. Според тоа,

$$\begin{aligned}\vec{q}^{\,2} &= \vec{\rho}^{\,2} + \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{\rho} + 2\vec{b} \cdot \vec{\rho} + 2\vec{c} \cdot \vec{\rho} \\ &= (\vec{\rho} + \vec{a})^2 + (\vec{\rho} + \vec{b})^2 + (\vec{\rho} + \vec{c})^2 - 2\vec{\rho}^{\,2} = 3R^2 - 2p^2,\end{aligned}$$

каде $p = |\vec{\rho}|$. Бидејќи точката P е во внатрешноста на сферата добиваме $p < R$, па според тоа $q = |\vec{q}| = \sqrt{3R^2 - 2p^2} > R$.

Значи, точката Q се наоѓа на сфера која е концентрична на дадената сфера, чиј радиус е $\sqrt{3R^2 - 2p^2}$. Ќе докажеме дека оваа сфера е бараното геометриско место на точки.

За дадената точка Q за која $\overline{OQ} = \sqrt{3R^2 - 2p^2}$ конструираме сфера чиј радиус е $\overline{PQ}$. Бидејќи $\overline{OQ} > R > \overline{OP}$ таа ја сече дадената сфера. Со C означуваме една од пресечните точки, а со X дијагонално спротивното теме на правоаголникот определен со CP и CQ. Векторски се докажува дека е исполнето равенството $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OX}^2$, па добиваме

$$\overline{OX}^2 = \overline{OP}^2 + (3R^2 - 2\overline{OP}^2) - R^2 = 2R^2 - p^2 > R^2,$$

т.е. X е надвор од дадената сфера. Пресекот на рамнината α, која минува низ точката P и е нормална на PC е кружница k, при што точката P е на таа кружница, а X е надвор од неа. Кружница со радиус $\overline{PX}$ во рамнината α ја сече кружницата k во точка B. Нека A е теме на правоаголник $PBXA$ спротивно на темето B. Ако B е на дадената сфера, добиваме

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 + 2R^2 - \overline{OP}^2 - R^2 = R^2,$$

т.е. A е исто така на дадената сфера и сите услови се исполнети.

3. Множеството природни броеви е запишано како унија на две дисјунктни подмножества: $\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$, $\{g(1), g(2), ..., g(n), ...\}$ такви што

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots,\ g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$$

и

$$g(n) = f(f(n)) + 1,\ \text{за секој}\ n \geq 1$$

Определи го бројот $f(240)$.

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $g(n) = f(f(n)) + 1$ и $f(f(n))$ е член на низата f, постојат точно $n-1$ членови на низата g кои што се помали од $f(f(n))$. Според тоа

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1. \tag{1}$$

Бидејќи $g(1) = f(f(1)) + 1 > 1$ добиваме $f(1) = 1$ и $g(1) = f(1) + 1 = 2$. Да забележиме уште дека бројот кој што претходи на членот на низата g мора да припаѓа на низата f, т.е. не може два последователни броја да бидат членови на низата g. Навистина, ако за некој n важи $g(n+1) = g(n) + 1$, тогаш според условот на задачата ќе важи $f(f(n+1)) = f(f(n)) + 1$, па од (1) ќе следува

$$f(f(n)) + 1 = f(n) + n - 1 \text{ и } f(f(n+1)) = f(n+1) + n,$$

т.е. $f(n) = f(n+1)$, што противречи на условот на задачата .

Од досега изнесеното и од формулата (1) добиваме:

$$f(2) = 3,$$
$$f(3) = f(f(2)) = f(2) + 1 = 4,$$
$$f(4) = f(f(3)) = f(3) + 2 = 6,$$
$$f(6) = f(f(4)) = f(4) + 3 = 9,$$
$$f(9) = 9 + 5 = 14,$$
$$f(14) = 22,$$
$$f(22) = 35,$$
$$f(35) = 56,$$
$$f(56) = 90,$$
$$f(90) = 145,$$
$$f(145) = 234,$$
$$f(234) = 378.$$

Понатаму, од $f(35) = 56$ следува $91 = f(f(35)) + 1 = g(35)$, па според тоа $f(57) = 92$. Сега повторно со примена на (1) добиваме:

$$f(92) = 148, \quad f(148) = 239, \quad f(239) = 386.$$

Конечно, $378 = f(f(148)) + 1 = g(148)$, па според тоа $f(240) = 388$.

Втор начин. Нека M е множеството од сите природни броеви од 1 до $g(n)$, каде што n е произволен природен број. Споиред условот на задачата бројот

$g(n)$ е еднаков на збирот од кардиналниот број на подмножеството броеви во M од обликот $f(k)$ и кардиналниот број на подмножеството броеви во M од обликот $g(k)$.

Броевите од обликот $g(k)$ во множеството M очигледно ги има n, а броевите од обликот $f(k)$ ги има $f(n)$, бидејќи најголемиот број од тој облик е $f(f(n)) = g(n) - 1$.

Според тоа, за секој природен број n ќе важи $g(n) = f(n) + n$.

За секој природен број ќе ги определиме вредностите на $f(n)$ и $g(n)$. За таа цел ќе ја користиме следнава теорема.

Теорема (*Бети*). За произволен позитивен ирационален број α и број $\beta > 0$ такви што $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, множествата

$$\{[\alpha], [2\alpha], ..., [n\alpha], ...\} \text{ и } \{[\beta], [2\beta], ..., [n\beta], ...\}$$

се дисјунктни, а нивната унија е множеството природни броеви $\mathbb{N}$ и $[k\alpha] \neq [n\alpha]$ и $[k\beta] \neq [n\beta]$ за различни природни броеви k и n.

Доказ. Го оставаме на читателот за вежба. ■

Според условот на задачата теоремата на Бети асоцира дека $f(n) = [n\alpha]$ и $g(n) = [n\beta]$, за некои α, $\beta > 0$. За да ги определиме α и β треба да го решиме системот равенки

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \text{ и } \beta - \alpha = 1, \ \alpha, \ \beta > 0.$$

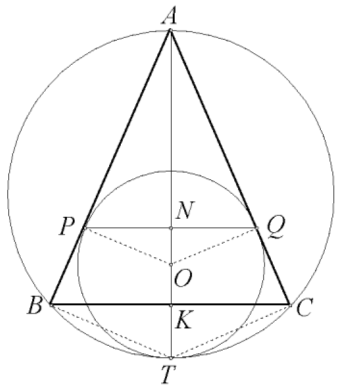
Решение на овој систем е $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Забележуваме дека α и β се ирационални броеви. Користејќи ја горната теорема за да докажеме дека $f(n) = [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n]$ и $g(n) = [\frac{3+\sqrt{5}}{2} n]$ доволно е да докажеме дека

$$[\frac{3+\sqrt{5}}{2} n] - [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n] = n \ .$$

Навистина, од својствата на функцијата $[\cdot]$ следува

$$[\frac{3+\sqrt{5}}{2} n] - [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n] = [(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) n] - [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n] = [n + \frac{1+\sqrt{5}}{2} n] - [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n]$$
$$= n + [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n] - [\frac{1+\sqrt{5}}{2} n] = n.$$

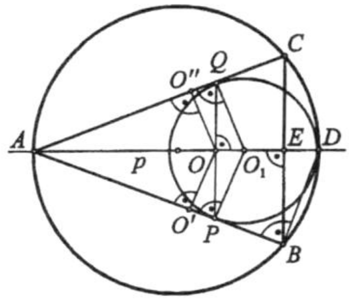
4. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Кружницата, која одвнатре ја допира опишаната кружница околу $\triangle ABC$, ги допира страните AB и AC во точки P и Q, соодветно. Докажи дека средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.



Решение. *Прв начин.* Нека O е центар на дадената кружница, а T е нејзина допирна точка со опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Добиената фигура е симетрична во однос на правата која што минува низ A, O, T и средината K на отсечката BC при што таа е нормална на BC. Хомотетија со центар во точката A која ја пресликува T во K, ја пресликува дадената кружница во впишаната кружница на $\triangle ABC$, па значи точката O ја пресликува во центарот U на таа кружница.

Центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$ е исто така на споменатата права, па $\measuredangle ABT = \measuredangle ACT = 90^\circ$. Четириаголниците $ABTC$ и $APOQ$ се слични, што значи дека со оваа хомотетија точката O се пресликува во средината на отсечката PQ.

Според тоа, средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$.



Втор начин. Нека правата p е симетрала на аголот α при темето A и нека таа ја сече опишаната кружница k околу триаголникот ABC во точката D. Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак, AD е дијаметар на опишаната кружница, па важи $\measuredangle ABD = 90^\circ$. Нека $O = PQ \cap AD$. Со O' и O'' да ги означиме проекциите на точката O врз правите AB и AC (цртеж десно). Нека O_1 е центарот на кружницата која што ги допира k, AB и AC и нека $E = AD \cap BC$. Триаголниците $AO'E$ и APD се слични бидејќи $\measuredangle DAB = \frac{\alpha}{2}$ им е заеднички и

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}} \cdot \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AO'}}{\overline{AP}}.$$

Оттука следува $O'E \parallel PD$. Покрај тоа важи $OO' \parallel O_1P$, па затоа $\triangle OEO' \sim \triangle O_1DP$. Бидејќи $\triangle O_1DP$ е рамнокрак, следува дека и $\triangle OEO'$ е рамнокрак, односно $\overline{OO'} = \overline{OE}$. Триаголникот ABC е рамнокрак, па ќе важи $\overline{OO''} = \overline{OO'} = \overline{OE}$. Понатаму, $\measuredangle AO''O = \measuredangle AO'O = \measuredangle BEC = 90^\circ$, па затоа точката O како средина на PQ е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

5. Нека $(a_k), k=1,2,...,n,...$ е низа од различни природни броеви. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

Решение. Ако низата $(a_1, a_2, ..., a_n)$ не е растечка, тогаш постои j таков што $a_j > a_{j+1}$ $(1 \leq j < n)$. Во овој случај е исполнето неравенството

$$\frac{a_j}{j^2} + \frac{a_{j+1}}{(j+1)^2} > \frac{a_{j+1}}{j^2} + \frac{a_j}{(j+1)^2} .$$

Навистина последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a_j - a_{j+1})((j+1)^2 - j^2) > 0 ,$$

кое очигледно е исполнето. Тоа значи, дека збирот

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$$

е поголем од соодветниот збир кога членовите на низата a_j и a_{j+1} ќе ги заменат местата. Последното значи, дека по конечен број чекори низата $(a_k), k=1,2,...,n,...$ можеме да ја трансформираме во низа $(b_1, b_2, ..., b_n)$, за која ќе важи $b_1 < b_2 < ... < b_n$ и збирот $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$. Понатаму, бидејќи $b_k \geq k$ за $k = 1, 2, ..., n$ добиваме

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

6. На еден меѓународен собир имало учесници од шест земји. Вкупниот број на учесници бил 1978, а секој учесник бил нумериран со број од 1 до 1978. Докажи дека постои барем еден учесник чиј број е еднаков на збирот на броевите на два члена од неговата земја, или е два пати поголем од бројот на некој член од неговата земја.

Решение. Бидејќи $1978 = 329 \cdot 6 + 4$, од принципот на Дирихле следува дека од една од државите, да ја наречеме A , има барем 330 членови на собирот. Нека нивните броеви се

$$a_1 < a_2 < ... < a_{330} .$$

Разгледуваме 329 разлики $a_{330} - a_i$ $(i = 1, 2, ..., 329)$. Ако некоја од овие разлики е еднаква на бројот на некој од членовите на собирот од A , тогаш тврдењето од задачата е докажано.

Нека секој разлика $a_{330} - a_i$ $(i = 1, 2, ..., 329)$ не е еднаква на некој број на член на собирот од државата A . Тоа значи дека тие припаѓаат на членовите на останатите пет држави. Сега, бидејќи $329 = 65 \cdot 5 + 4$, повторно од принципот на Дирихле меѓу горните разлики има 66 учесници на собирот, $b_1 < b_2 < ... < b_{66}$ кои припаѓаат на иста држава, на пример B. Тогаш, или некоја од разликите $b_{66} - b_i$ $(i = 1, 2, ..., 65)$ припаѓа на некоја од државите A и B (во тој случај тврдењето е докажано) или ниту една не припаѓа на некоја од тие држави.

Да претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Продолжувајќи ја постапката, бидејќи $65 = 4 \cdot 16 + 1$ добиваме дека 17 од тие разлики припаѓаат на членови кои се од иста држава, на пример C, потоа бидејќи $16 = 3 \cdot 5 + 1$ следува дека од шеснаесетте нови разлики, шест од нив се во иста држава D; од петте наредни разлики три се во E. На крај, двете нови разлики мора да бидат во преостанатата држава F. (Да забележиме дека секоја разлика е од облик $a_p - a_q$). Нивната разлика не може да биде во ниту една држава A, B, C, D, E, F. (Таа не може да биде во F бидејќи разликата на два броја не може да биде еднаква на некој од тие броеви). Ова, меѓутоа, не е можно бидејќи секој природен број помал од 1978 мора да биде во некоја од шесте разгледувани држави. Затоа претпоставката не е точна, т.е. исполнето е тврдењето од задачата.