**Регионален натпревар 2021**

**I година**

**1А.** Анастас, Елена, Петар и Мартина, во исчекување на резултатите од регионалниот натпревар по математика, коментирале околу нивниот можен пласман на државниот натпревар. Анастас рекол „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Елена ќе се пласира на натпреварот“. Елена рекла „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Петар ќе се пласира на натпреварот“. Петар рекол „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира на натпреварот“. Сите овие искази се точни, меѓутоа само двајца ученици се пласирале на државниот натпревар. Кои се двајцата ученици кои се пласирале од регионалниот на државниот натпревар?

**Решение.** Нека Анастас се пласирал на државниот натпревар. Тогаш, бидејќи сите искази се точни, од исказот на Анастас – „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Елена ќе се пласира“, ќе следува дека мора и Елена да се пласирала на државниот натпревар. Но, од исказот на Елена – „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Петар ќе се пласира на натпреварот“, ќе мора и Петар да се пласирал на натпреварот. Од исказот на Петар, „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира“, следува дека и Мартина се пласирала на државниот натпревар. Во овој случај добивме дека сите 4 ученици се пласирале на државниот натпревар, што е контрадикција. Значи, Анастас не се пласирал на државниот натпревар.

Нека Анастас не се пласирал, но нека Елена се пласирала на државниот натпревар. Од нејзиниот исказ – „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Петар ќе се пласира на натпреварот“, ќе мора и Петар да се пласира на натпреварот. Од исказот на Петар, „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира“, следува дека и Мартина се пласирала на државниот натпревар. Во овој случај добивме дека 3 ученици се пласирале на државниот натпревар, што е контрадикција. Значи, Елена не се пласирала на државниот натпревар.

Нека Анастас и Елена не се пласирале, но нека Петар се пласирал на државниот натпревар. Тогаш од неговиот исказ - „Ако јас се пласирам на државниот натпревар, тогаш и Мартина ќе се пласира“, следува дека и Мартина се пласирала на државниот натпревар, па во овој случај имаме само 2 пласирани учесници, Петар и Мартина, а вистиноста на првите два искази е точна затоа што $\tau(F \Rightarrow p) = T$, каде $F$ е неточен исказ, $T$ е точен исказ, а $p$ е произволен исказ. Значи, на државниот натпревар се пласирале само Петар и Мартина.

**1Б.** Диме има два пати повеќе браќа од сестри, а неговата сестра Марија има пет пати повеќе браќа од сестри. Колку браќа и колку сестри има во таа фамилија?

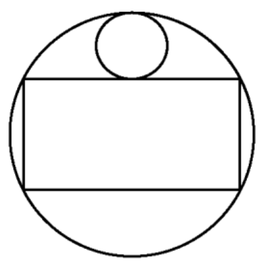
**Решение.** Нека во семејството има $x$ машки деца и $y$ женски деца. Бројот на сестри кои го има Диме е $y$, а бројот на браќа е $x-1$. Од условот на задачата имаме дека $x-1=2y$. Бројот на сестри кои го има Марија е $y-1$, а бројот на браќа е $x$. Тогаш, имаме дека $x=5(y-1)$.

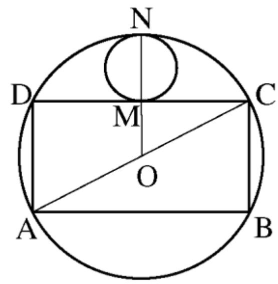
Со решавање на системот равенки $x-1=2y$ и $x=5(y-1)$, добиваме дека $x=5$ и $y=2$.

**2АБ.** Правилната дропка $\frac{a}{b}$ може да се претстави во обликот $\frac{6}{n}-\frac{9}{n^2}$, каде што $n$ е природен број. Одреди ја вредноста на $a$, ако $b-a=961$.

**Решение.** Од условот на задачата $\frac{a}{b}=\frac{6}{n}-\frac{9}{n^2}=\frac{6n-9}{n^2}$. Дропката $\frac{a}{b}$ правилна дропка, односно нескратлива дропка, па мора да важи дека $a$ и $b$ се заемно прости броеви. Тоа би значело дека $\text{NZD}(a,b)=1$, па затоа $\text{NZD}(6n-9,n^2)=1$. Тогаш, мора да важи дека $a=6n-9$ и $b=n^2$. Ако замениме во условот дека $b-a=961$, добиваме $n^2-6n+9=961$, односно $(n-3)^2=31^2$. Одовде, следува дека $n-3=31$, т.е. $n=34$. Тогаш, $a=6\cdot 34-9=195$.

**3АБ.** Во една кружница е впишан правоаголник, а во еден од кружните отсечоци е впишана најголема можна кружница, која допира една страна на правоаголникот и ја допира одвнатре поголемата кружница, како на цртежот. Радиусот на помалата кружница е 3 единици, а големата кружница има радиус $r>3$. Познато е дека правоаголникот има плоштина $P=72\sqrt{2}$ квадратни единици. Одреди го радиусот $r$ на поголемата кружница.






**Решение.** Нека страните на правоаголникот $ABCD$ се $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ и $\overline{BC}=\overline{AD}=b$. Имаме $r=\overline{ON}=\overline{OM}+\overline{MN}=\frac{b}{2}+6$, од каде

$$b=2(r-6). \qquad (1)$$

Триаголникот $ABC$ е правоаголен, па од Питагоровата теорема имаме

$$a^2+b^2=(2r)^2. \qquad (2)$$

Сега, равенството (1) го заменуваме во равенството (2) и добиваме

$$a^2=4r^2-4(r-6)^2=48(r-3).$$

За поедноставно, ќе го пресметаме квадратот на плоштината на правоаголникот:

$$P^2=a^2b^2=48(r-3)\cdot 4(r-6)^2=192(r-3)(r-6)^2,$$

па затоа

$$192(r-3)(r-6)^2=(72\sqrt{2})^2.$$

По средувањето на изразот добиваме

$$(r-3)(r-6)^2=54.$$

Ако воведеме смена $x=r-3$ равенката преминува во облик $x(x-3)^2=54$, односно $x^3-6x^2+9x-54=0$. Со групирање, левата страна ја разложуваме на множители $x^2(x-6)+9(x-6)=0$, од каде $(x-6)(x^2+9)=0$. Бидејќи $x^2+9>0$, следи дека $x-6=0$, односно $x=6$, па $r-3=6$, од каде $r=9$ единици.

**4А.** Најди ги сите четирицифрени броеви од обликот $\overline{xyzt}$, кои ги задоволуваат равенките $\overline{ztx}-\overline{xyz}=495$ и $x+y+z=17$.

**Решение.** Од првата равенка добиваме

$$x+10t+100z-100x-10y-z=495,$$

односно

$$99(z-x-5)=10(y-t). \qquad (*).$$

Левата страна на последното равенство е делива со бројот 11, што значи дека мора и десната страна да е делива со 11. Броевите 11 и 10 се заемно прости, па мора да важи дека $11\,|\,y-t$. Бидејќи $y,t\in\{0,1,...,9\}$, следува дека $y=t=0$, односно $y=t$. Ако десната страна на (*) е 0, тогаш мора да важи дека $z-x-5=0$, односно $z=x+5$. Со замена во втората равенка добиваме дека $y=2(6-x)$. Задаваме вредности за цифрата $x$, ги добиваме за $y$, $z$ и $t$. Конечно, бараните броеви се: 2878, 4494 и 3686.

**4Б.** Во една продавница има три типа на џамлии: од 1 денар, од 2 денари и од 6 денари. На колку начини од таа продавница, може за 50 денари да се купат 30 џамлии, така што од секој вид џамлии да се купи барем по една џамлија?

**Решение.** Нека со $x$ ги означиме бројот на џамлии од 1 денар, со $y$ бројот на џамлии од 2 денари и со $z$ оние кои чинат 6 денари. Тогаш, имаме $x+y+z=30$ и $x+2y+6z=50$, каде $x, y, z$ се природни броеви.

Ако првата равенка ја одземеме од втората, добиваме дека $y+5z=20$, односно $5z=20-y$. Бидејќи $z\in\mathbb{N}$, мора да важи дека $5\,|\,20-y$, а одовде пак следува дека $20-y\in\{5,10,15\}$. Конечно $y\in\{5,10,15\}$ .

Да ги одредиме уште вредностите на другите две непознати:

- Ако $y=5$, тогаш $z=\frac{20-5}{5}=3$ и $x=30-5-3=22$.
- Ако $y=10$, тогаш $z=\frac{20-10}{5}=2$ и $x=30-10-2=18$.
- Ако $y=15$, тогаш $z=\frac{20-15}{5}=1$ и $x=30-15-1=14$.

## II година

**1АБ.** Нека $x_1$ и $x_2$ се решенија на равенката $x^2+ax+b=0$, а $y_1$ и $y_2$ се решенија на равенката $y^2+(a+1)y+b+1=0$, $a,b\in\mathbb{R}$, Пресметај ја вредноста на изразот

$$(x_1-y_1)(x_1-y_2)+(x_2-y_1)(x_2-y_2).$$

**Решение.** Од Виетовите формули ги имаме равенствата

$$x_1+x_2=-a,\ x_1x_2=b,\ y_1+y_2=-(a+1),\ y_1y_2=b+1.$$

Тогаш:

$$\begin{aligned}(x_1-y_1)(x_1-y_2)&+(x_2-y_1)(x_2-y_2)=\\ &=x_1^2-(y_2+y_1)x_1+y_2y_1+x_2^2-(y_2+y_1)x_2+y_2y_1\\ &=x_1^2+(a+1)x_1+b+1+x_2^2+(a+1)x_2+b+1\\ &=x_1^2+ax_1+b+x_2^2+ax_2+b+x_1+x_2+2\\ &=0+0-a+2=2-a.\end{aligned}$$

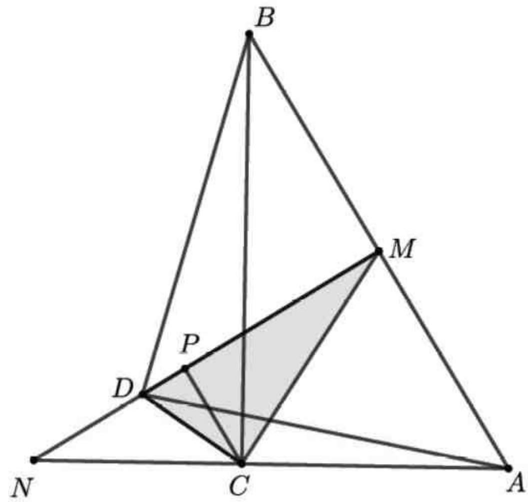
**2АБ.** Во триаголникот $ABC$ познати се $\overline{AC}=6cm, \overline{BC}=8cm$ и $\measuredangle ACB=90^{\circ}$. Точката $M$ е средина на отсечката $AB$, а точката $D$ лежи на истата страна од отсечката $AB$ како и точката $C$, но така што $\overline{DA}=\overline{DB}=7\ cm$. Пресметај ја плоштината на триаголникот $CDM$.

**Решение.** Од Питагоровата теорема за триаголникот $ABC$ следува дека

$$\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10\,cm.$$

Триаголникот $ADB$ е рамнокрак триаголник, па во него тежишната линија повлечена од врвот $D$ е истовремено и висина. Заради тоа триаголникот $DMB$ е правоаголен триаголник и

$$\overline{DM}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}\,cm.$$




Нека $N$ е пресечната точка на правите $DM$ и $AC$. Триаголниците $NAM$ и $BAC$ се слични (имаат еднакви агли) и од нивната сличност важи $\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$

Тогаш, $\overline{NA}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BA}}{\overline{AC}}=\frac{25}{3}\,cm$. Нека $CP$ е висината во триаголникот $CDM$ спуштена од темето $C$. Тогаш и триаголниците $NCP$ и $NAM$ се слични (имаат еднакви агли) и затоа важи $\frac{\overline{CP}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$, т.е. $\frac{\overline{CP}}{\overline{NA}-\overline{AC}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}$. Оттука $\overline{CP}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NA}}(\overline{NA}-\overline{AC})=\frac{7}{5}\,cm$.

За плоштината на триаголникот $CDM$ имаме

$$P=\frac{\overline{DM}\cdot\overline{CP}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{5}\,cm^2.$$

**3А.** Нека $z_1, z_2, z_3$ се комплексни броеви за кои што важи

$$|z_1|=|z_2+z_3|,\ |z_2|=|z_3+z_1|,\ |z_3|=|z_1+z_2|.$$

Докажи дека

$$z_1+z_2+z_3=0.$$

**Решение.** *Прв начин.* Нека $z_1=a+ib, z_2=c+id, z_3=e+if$. Од условот на задачата имаме

$$a^2+b^2=(c+e)^2+(d+f)^2,$$
$$c^2+d^2=(e+a)^2+(f+b)^2,$$
$$e^2+f^2=(a+c)^2+(b+d)^2.$$

Ако ги собереме последните три равенства, по квадрирањето и средувањето добиваме

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2(ac+ce+ea)+2(bd+df+fb)=0,$$
$$(a+c+e)^2+(b+d+f)^2=0,$$
$$|z_1+z_2+z_3|^2=0,$$
$$|z_1+z_2+z_3|=0,$$

па затоа .

*Втор начин.* Имаме $|z_1|^2=|z_2+z_3|^2$, $|z_2|^2=|z_3+z_1|^2$, $|z_3|^2=|z_1+z_2|^2$, од каде по средувањето ги добиваме равенствата

$$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3},$$
$$z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_3\overline{z_3},$$
$$z_3\overline{z_3}=z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}.$$

Последните три равенства ги собираме и последователно добиваме

$$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_1\overline{z_3}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}=0,$$
$$z_1(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})+z_2(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})+z_3(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=0,$$
$$(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=0,$$
$$|z_1+z_2+z_3|^2=0,$$
$$|z_1+z_2+z_3|=0,$$

па затоа $z_1+z_2+z_3=0$

**4А.** Силвија избрала три природни броеви $a$, $b$ и $c$. Петар добил дека вредноста на $a+\frac{b}{c}$ е 101, Лина добила дека вредноста на $\frac{a}{c}+b$ е 68, а Марија дека вредноста на $\frac{a+b}{c}$ е $k$. Определи ги $a$,$b$, $c$ и $k$.

**Решение.** Од $a+\frac{b}{c}=101$ и $a$ е природен број следува дека $\frac{b}{c}$ е природен број и затоа $b=cx$, каде $x$ е природен број. Слично, од $\frac{a}{c}+b=68$ следува дека $\frac{a}{c}$ е природен број и затоа $a=cy$, каде $y$ е природен број.

Имаме $a+x=101$ и $y+b=68$ и оттука $a+x+y+b=169$. Бидејќи $\frac{a+b}{c}=k$ следува и дека $k$ е природен број и притоа важи $k=x+y$. Имаме, $cy+x+y+cx=169$ , па е $(x+y)(c+1)=169$ , т.е. $k(c+1)=169$. Делители (природни) на 169 се 1, 13 и 169. Бидејќи $k=x+y\geq 1+1=2$ имаме дека $k\neq 1$, а бидејќи $c+1\geq 1+1=2$ следува дека $k\neq 169$. Затоа, $k=13$ и $c+1=13$, т.е. $c=12$. Од $\frac{a}{c}+b=68$ следува дека $b\leq 68$, а од $a+\frac{b}{c}=101$ следува дека $b$ е делив со 12. Затоа, $b\in\{12,24,36,48,60\}$. Бидејќи $a+k+b=169$, добиваме $a+b=156$, па $a=156-b\in\{144,132,120,108,96\}$. Од $a+\frac{b}{c}=101$ следува $a\leq 101$, па затоа $a=96$. Значи, $b=60$.

Конечно, бараните броеви се $a=96$, $b=60$, $c=12$ и $k=13$.

**3Б.** За линеарните функции

$$f(x)=mx+m^2-1 \text{ и } g(x)=(m-1)x+m(m+2),\ m\neq 0,1,$$

важи дека постои број $a$ така што $f(a)=g(a)$. За кое $m$ важи дека $|a|<3$?

**Решение.** Од условот $f(a)=g(a)$ следува дека

$$ma+m^2-1=(m-1)a+m(m+2)$$

и оттука $a=2m+1$. За да важи $|a|<3$, потребно и доволно е да важи $-3<2m+1<3$, па оттука $-2<m<1$. Значи, $m\in(-2,1)\setminus\{0\}$.

**4Б.** За реалните броеви $a_1,a_2,a_3,\ ...,a_{2021}$ важи дека збирот на кои било три броеви чии индекси се последователни броеви $i,i+1,i+2,\ i=1,...,2019$, изнесува 2021. Ако $a_1=1000$ и $a_{2021}=900$, определи ги останатите броеви.

**Решение.** Имаме:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=2021, \\ a_2+a_3+a_4=2021, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}=2021, \\ a_{2019}+a_{2021}+a_{2021}=2021. \end{cases}$$

Од првите две равенки следува $a_1=a_4$, од следните две $a_2=a_5$, па $a_3=a_6$ итн. до $a_{2017}=a_{2020}$ и $a_{2018}=a_{2021}$. Имаме

$$a_1=a_4=...=a_{2017}=a_{2020}=1000 \text{ и } a_2=a_5=...=a_{2018}=a_{2021}=900.$$

Според тоа,

$$a_3 = a_6 = ... = a_{2016} = a_{2019} = 2021 - 1000 - 900 = 121.$$

**III година**

**1АБ.** Дадена е функцијата $f(x) = (a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 5)$, каде $a$ е реален параметар. Одреди ги оние вредности на параметарот $a$ од множеството природни броеви, за кои функцијата $f$ има еден корен поголем од 1, а другиот помал од 1?

**Решение**. Коефициентот пред квадратниот член $a^2 + a + 1$ е позитивен па функцијата $f$ е конвексна (отворена нагоре). Нека $x_1$ и $x_2$ се корените на равенката $f(x) = 0$. Да претпоставиме дека $x_1 < x_2$, па согласно условот на задачата мора да важи $x_1 < 1 < x_2$. Од конвексноста на функцијата јасно е дека за секој $x \in (x_1, x_2)$, вклучително и за 1, важи $f(x) < 0$. Оттука важи и $f(1) < 0$, односно $a^2 + a + 1 + 2a - 3 + a - 5 < 0$ од каде ја добиваме квадратната неравенка $a^2 + 4a - 7 < 0$, чие решение е $a \in (-2 - \sqrt{11}, -2 + \sqrt{11})$. Ги бараме само природните вредности на параметарт $a$, па единствена таква вредност е $a = 1$.

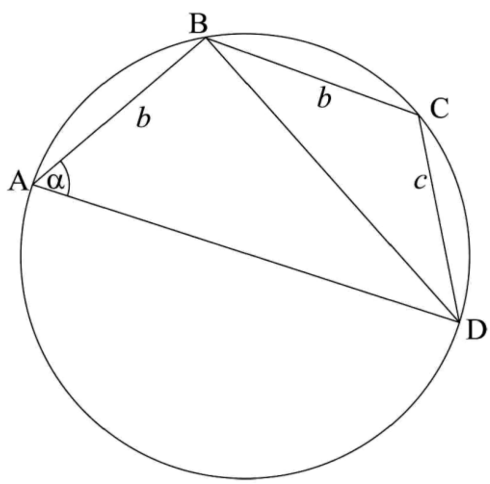
**2А.** Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник така што важи: $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{3}$, $\overline{CD} = 2$ и $\measuredangle BAD = 30^\circ$. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$.

**Решение.** Нека $\overline{AB} = \overline{BC} = b = \sqrt{3}$, $\overline{CD} = c = 2$ и $\measuredangle BAD = 30^\circ$. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен $\measuredangle BCD = 180^\circ - 30 = 150^\circ$. Ќе ја искористиме косинусната теорема, применета на $\triangle BAD$ и $\triangle BCD$. Од $\triangle BAD$ имаме

$$\overline{BD}^2 = b^2 + \overline{AD}^2 - 2b\overline{AD}\cos 30^\circ,$$

а пак од $\triangle BCD$ имаме

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 150^\circ.$$



Со изедначување на двете равенства добиваме дека

$$b^2+\overline{AD}^2-2b\overline{AD}\cos 30^\circ = b^2+c^2-2bc\cos 150^\circ,$$

односно $\overline{AD}^2-3\overline{AD}-10=0$. Решение по $\overline{AD}$ е само позитивниот корен, $\overline{AD}=5$. Сега за плоштината на четириаголникот $ABCD$ добиваме

$$\begin{aligned} P_{\square ABCD} &= P_{\triangle ABD}+P_{\triangle BCD} \\ &= \tfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}\sin 30^\circ+\tfrac{\overline{BC}\cdot\overline{DC}}{2}\sin 150^\circ \\ &= \tfrac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{7\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

**2Б.** Докажи дека за секоја вредност на променливата $x$ од множеството $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ важи неравенството

$$16\sin^2 x-9\operatorname{tg}^2 x\le 1. \tag{1}$$

**Решение.** Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$16\sin^2 x-9\tfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1\le 0.$$

Заради дефиниционата област на функцијата $\operatorname{tg}x$ важи $x\ne(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. За секоја вредност на $x$ од множеството $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ последното неравенство може да го помножиме со $\cos^2 x$ и го добиваме еквивалентното неравенство

$$16\sin^2 x\cos^2 x-9\sin^2 x-\cos^2 x\le 0.$$

кое последователно е еквивалентно со неравенствата

$$16\sin^2 x(1-\sin^2 x)-9\sin^2 x-(1-\sin^2 x)\le 0,$$
$$16\sin^4 x-8\sin^2 x+1\ge 0,$$
$$(4\sin^2 x-1)^2\ge 0.$$

Конечно од точноста на последното неравенство следува дека е точно неравенството (1).

**3АБ.** Реши го системот равенки за $x,y\in\mathbb{R}$, $y>1$:

$$\begin{cases} 2\log_{y+2}(x^2+3y+y^2)-\log_{x^2+3y+y^2}(y^3+x^2y+5y^2+2x^2+6y)=\frac{5}{2} \\ y^3+x^2=134. \end{cases}$$

**Решение.** Имаме

$$\log_{x^2+3y+y^2}(y^3+x^2y+5y^2+2x^2+6y)=\log_{x^2+3y+y^2}(x^2+3y+y^2)(y+2)$$
$$=1+\frac{1}{\log_{y+2}(x^2+3y+y^2)}.$$

Воведуваме смена $\log_{y+2}(x^2+3y+y^2)=X$. Бидејќи за $y>1$ важи $y+2>1$ и $x^2+3y+y^2>1$, заклучуваме дека $X=\log_{y+2}(x^2+3y+y^2)>0$. Од првата равенка на системот ја добиваме равенката $2X-1-\frac{1}{X}=\frac{5}{2}$, која е еквивалентна со равенката $4X^2-7X-2=0$. Решенија на последната равенка се $X=2$ и $X=-\frac{1}{4}$, па како $X>0$, го земаме само решението $X=2$.

Со замена добиваме $(y+2)^2=x^2+3y+y^2$, од каде следува $y+4=x^2$. Сега заменуваме во втората равенка на системот и последователно добиваме $y^3+y+4=134$, т.е. $y^3+y-130=0$. Последната равенка има целобројни коефициенти и водечки коефициент 1, па затоа ако има рационален корен корен тој е цел број делител на слободниот член, т.е. на 130. Делители на 130 се $\pm1,\pm2,\pm5,\pm13$. Но, оваа равенка може да има само позитивен корен, па затоа доволно е да ги провериме 1, 2, 5 и 13. Лесно се добива дека единствен корен е $y=5$. Понатаму, равенката е еквивалентна со равенката $(y-3)(y^2+5y+26)=0$, па како $y^2+5y+26>0$, таа нема други реални корени. Конечно, решенијата на системот се $y=5$, $x=\pm3$.

**4А.** Пресметај ја вредноста на изразот

$$\cos x\cos 2x\cos 3x...\cos 1010x, \text{ за } x=\frac{2\pi}{2021}.$$

**Решение.** Да воведеме ознаки:

$$P=\cos x\cos 2x\cos 3x...\cos 1010x \text{ и } Q=\sin x\sin 2x\sin 3x...\sin 1010x.$$

Имаме

$$\begin{aligned}2^{1010}PQ&=2\cos x\sin x\cdot 2\cos 2x\sin 2x\cdot 2\cos 3x\sin 3x...2\cos 1010x\sin 1010x\\&=\sin 2x\sin 4x\sin 6x...\sin 1010x\sin 1012x...\sin 2020x\\&=\sin 2x\sin 4x\sin 6x...\sin 1010x(-\sin(2\pi-1012x)...(-\sin(2\pi-2020x))\\&=(-1)^{505}\sin 2x\sin 4x\sin 6x...\sin 1010x\sin(2\pi-1012x)...\sin(2\pi-2020x).\end{aligned}$$

Сега, ако искористиме дека за $x=\frac{2\pi}{2021}$ важи

$$\sin(2\pi - 1012x) = \sin(2\pi - 1012\tfrac{2\pi}{2021}) = \sin 2\pi(1 - \tfrac{1012}{2012})$$
$$= \sin 1009 \cdot \tfrac{2\pi}{2021} = \sin 1009x,$$

и аналогно

$$\sin(2\pi - 1014x) = \sin 1007x,$$
$$\sin(2\pi - 1016x) = \sin 1005x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(2\pi - 2020x) = \sin x,$$

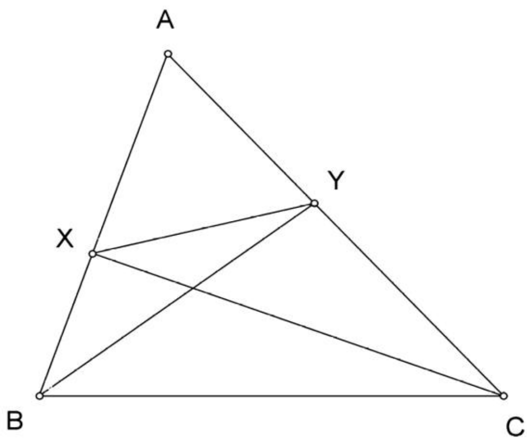
добиваме

$$2^{1010} PQ = (-1)^{505} \sin 2x \sin 4x \sin 6x \ldots \sin 1010x \sin 1009x \sin 1007x \ldots \sin x$$
$$= -\sin x \sin 2x \sin 3x \ldots \sin 1010x = -Q.$$

Понатаму, бидејќи $\sin kx = \sin \frac{2k\pi}{2021} \neq 0, k = 1,2,\ldots,1010$, добиваме $Q \neq 0$, па затоа од $2^{1010} PQ = -Q$ следува $P = -\frac{1}{2^{1010}}$.

**4Б.** Даден е триаголник *ABC*, $\overline{AB} = 20$. На страните *AB* и *AC* на триаголникот *ABC* се избрани точки *X* и *Y* така што $\overline{AX} = \overline{AY} = 15$ и плоштината на триаголникот *ABC* е два пати поголема од плоштината на триаголникот *AXY*. Најди го односот на плоштините на триаголниците *BXY* и *CXY*.

**Решение.** Да го означиме аголот во темето *A* со $\alpha$. За плоштината на двата триаголници имаме




$$P_{\triangle ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin\alpha}{2}$$
$$= 10\overline{AC} \sin\alpha = 2P_{\triangle AXY}$$

и

$$P_{\triangle AXY} = \frac{\overline{AX} \cdot \overline{AY} \sin\alpha}{2} = \frac{225 \sin\alpha}{2}$$

Тогаш според условот

$$10\overline{AC} \sin\alpha = 225 \sin\alpha$$

и затоа $\overline{AC} = \frac{45}{2}$. Сега $\overline{XB} = 5$ и $\overline{AC} = \frac{15}{2}$. Триаголниците *AXY* и *BXY* имаат заедничка висина спуштена од темето *Y* па затоа $\frac{P_{\triangle AXY}}{P_{\triangle BXY}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = 3$. Слично, триаголниците *CYX* и *AYX* имаат заедничка висина спуштена од темето *X*, па оттука важи $\frac{P_{\triangle AXY}}{P_{\triangle CXY}}=\frac{\overline{AY}}{\overline{BY}}=2$. Тогаш бараниот однос на плоштините на триаголниците $BXY$ и $CXY$ е $\frac{P_{\triangle BXY}}{P_{\triangle CXY}}=\frac{\frac{P_{\triangle AXY}}{3}}{\frac{P_{\triangle AXY}}{2}}=\frac{2}{3}$.

**IV година**

**1А.** а) Нека $f$ е реална функција дефинирана на $\mathbb{R}$. Најди ја реалната функција $g(x)$, ако $f(x)=3x+2$ и $f(x^2+xg(x))=3x^2+6x+5$, за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

б) Нека $f(x)=x+2$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Најди функција $g$ $(x)$, таква што $f(g(f(x)))=5x-1$.

**Решение. а)** Ако $f(x)=3x+2$, тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned}&f(x^2+xg(x))=3(x^2+xg(x))+2,\\&3(x^2+xg(x))+2=3x^2+6x+5,\\&3xg(x)=6x+3,\\&g(x)=2+\frac{1}{x},\end{aligned}$$

за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Со непосредна проверка добиваме дека важи условот

$$f(x^2+xg(x))=f(x^2+x\cdot(2+\tfrac{1}{x}))=f(x^2+2x+1)=3x^2+6x+5,$$

за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, т.е. $g(x)=2+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ е бараната функција.

**б)** Нека $f(x)=x+2$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Тогаш

$$f(g(f(x)))=g(f(x))+2=g(x+2)+2$$

и како $f(g(f(x)))=5x-1$, добиваме $g(x+2)+2=5x-1$, за секој $x\in\mathbb{R}$, т.е. $g(x+2)=5x-3$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Според тоа, $g(x+2)=5(x+2)-13$, за секој $x\in\mathbb{R}$ и оттука следува $g(t)=5t-13$, за секој $t\in\mathbb{R}$.

**2А.** За низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ важи

$$a_1=1 \text{ и } a_{n+1}^2+a_{n+1}=a_n, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Докажи дека $a_n\geq\frac{1}{n}$.

**Решение.** Да забележиме дека неравенството важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека неравенството важи за некој природен број $n$. Функцијата

$f(x)=x^2+x$ е монотоно растечка за $x>0$. Притоа важи $f(a_{n+1})=a_n$. Сега, за да докажеме дека $a_{n+1}\geq\frac{1}{n+1}$, бидејќи функцијата $f$ монотоно расте на множеството позитивни броеви доволно е да докажеме дека $f(a_{n+1})\geq f(\frac{1}{n+1})$. Имаме

$$f(\tfrac{1}{n+1})=(\tfrac{1}{n+1})^2+\tfrac{1}{n+1}=\tfrac{n+2}{(n+1)^2}=\tfrac{n^2+2n}{n(n+1)^2}<\tfrac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\tfrac{1}{n}\leq a_n=f(a_{n+1}).$$

Според тоа, неравенството важи за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

**3А.** Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви за кои важи $a_1a_2...a_n=1$. Докажи го неравенството

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2-1)\geq(a_1+a_2+...+a_n-1)^2.$$

**Решение.** Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1\geq a_2\geq...\geq a_n$. Бидејќи $a_1a_2...a_n=1$, важи $a_1\geq1\geq a_n$. Оттука

$$a_1+a_2+...+a_n-1>0,\ a_1^2+a_2^2+...+a_n^2-1>0 \text{ и } a_1^2+a_n^2-1>0.$$

Нека

$$a_1^2+a_n^2-1=b_1^2,\ b_1>0.$$

Од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина за позитивните броеви $b_1,a_2,...,a_{n-1}$ добиваме

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2-1)=(n-1)(b_1^2+a_2^2+...+a_{n-1}^2)\geq(b_1+a_2+...+a_{n-1})^2$$

Останува да докажеме дека $b_1\geq a_1+a_n-1$, што е еквивалентно на

$$\sqrt{a_1^2+a_n^2-1}\geq a_1+a_n-1.$$

Квадрирајќи го последното неравенство го добиваме еквивалентното неравенство

$$2(a_1-1)(1-a_n)\geq0$$

кое важи заради горните услови.

**4АБ.** За прв член на една геометриска прогресија е избран произволен сложен број, а за нејзин количник произволен прост делител на првиот член. Формираме нова низа така што секој нејзин член го претставува бројот на природните делители на соодветниот член од геометриската прогресија. Докажи дека новоформираната низа е аритметичка прогресија.

**Решение.** Нека $a_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ е прв член на геометриската прогресија каде $p_1, p_2, ..., p_k$ се неговите прости делители, и нека $p_i$ е избран количник за геометриската прогресија. На тој начин ја добиваме низата:

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} ... p_i^{\alpha_i} ... p_k^{\alpha_k},\ a_2 = p_1^{\alpha_1} ... p_i^{1+\alpha_i} ... p_k^{\alpha_k},\ ...,\ a_n = p_1^{\alpha_1} ... p_i^{n+\alpha_i} ... p_k^{\alpha_k},\ ...$$

Новоформираната низа која се состои од бројот на природни делители на членовите од горната низа е:

$$b_1 = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_i)...(1+\alpha_k),$$
$$b_2 = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(2+\alpha_i)...(1+\alpha_k),$$
$$..............................................................$$
$$b_n = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(n+\alpha_i)...(1+\alpha_k),$$
$$..............................................................$$

Нека $S = \frac{b_1}{1+\alpha_i}$. Лесно се покажува дека $b_k = S\alpha_i + kS = b_1 + (k-1)S$, за секој $k \in \mathbb{N}$, што значи дека $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија со разлика $d = S$.

**1Б.** Одреди ги сите парови природни броеви $(a,b)$ такви што $a \le b$ и

$$(a+\tfrac{6}{b})(b+\tfrac{6}{a}) = 25$$

**Решение.** Дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$ab + \frac{36}{ab} + 12 = 25$$
$$(ab)^2 - 13ab + 36 = 0$$
$$(ab-4)(ab-9) = 0.$$

Според тоа, $ab = 4$ или $ab = 9$. Но, $a,b \in \mathbb{N}$ и $a \le b$, па затоа:

- од $ab = 4$ следува $(a,b) = (1,4)$ или $(a,b) - (2,2)$,
- од $ab = 9$ следува $(a,b) = (1,9)$ или $(a,b) = (3,3)$.

**2Б.** Определи го реалниот број $x$ така што низата $\sqrt{x-7}, \sqrt[4]{2x+19}$, $\sqrt{x+3}$ е геометриска прогресија.

**Решение.** Јасно $x \ge 7$. Имаме $\sqrt[4]{2x+19}^2 = \sqrt{x-7}\sqrt{x+3}$, од каде добиваме

$$2x+19 = (x-7)(x+3),\ \text{т.е.}\ x^2 - 6x - 40 = 0.$$

Решенија на последната квадратна равенка се $x_1=-4$ и $x_2=10$. Но, $x\geq 7$, па затоа единствена вредност на $x$ за која се добива геоемтриска прогресија е $x=10$.

**3Б.** Пресметај го збирот
$$\binom{2021}{1}+2\binom{2021}{2}+3\binom{2021}{3}+...+2021\binom{2021}{2021}.$$

**Решение.** Да означиме
$$S=\binom{2021}{1}+2\binom{2021}{2}+3\binom{2021}{3}+...+2021\binom{2021}{2021}.$$

Ако го искористиме идентитетот $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, добиваме
$$S=\binom{2021}{2020}+2\binom{2021}{2019}+3\binom{2021}{2018}+...+2021\binom{2021}{0}.$$

Затоа
$$\begin{aligned}2S&=2021\binom{2021}{0}+(2020+1)\binom{2021}{1}+...+(2020+1)\binom{2021}{2020}+2021\binom{2021}{2021}\\&=2021\left(\binom{2021}{0}+\binom{2021}{1}+...+\binom{2021}{2020}+\binom{2021}{2021}\right)\\&=2021\cdot 2^{2021}.\end{aligned}$$

Конечно, $S=2021\cdot 2^{2020}$.