Osječki matematički list 17 (2017), 125-137

Čebiševljeva i Markovljeva nejednakost u teoriji vjerojatnosti

Dragana Jankov Maširević*, Nera Keglević†

Sažetak

U ovom članku su, u vjerojatnosnom kontekstu, navedene i dokazane Čebiševljeva i Markovljeva nejednakost koje imaju važnu primjenu u području teorije vjerojatnosti. Također, dani su primjeri problema iz svakodnevnoga života koji se mogu riješiti pomoću ovih nejednakosti.

Ključne riječi: *vjerojatnost, nejednakosti, Čebiševljeva nejednakost, Markovljeva nejednakost*

Chebyshev's and Markov's inequality in probability theory

Abstract

In this paper we present, in probability context, Chebyshev's and Markov's inequality which have an important application in probability theory. Also, examples of real-life problems that can be solved by applying such inequalities are given.

Keywords: *probability, inequalities, Chebyshev's Inequality, Markov's Inequality*

1 Nejednakosti u teoriji vjerojatnosti

Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903.–1987.), ruski matematičar

Još je davne 1933. Kolmogorov aksiomatizirao vjerojatnost (vidi npr. [1]) uvođenjem *vjerojatnosnog prostora*, što je naziv za uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: djankov@mathos.hr

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: n.keglevic12@gmail.com

koja se sastoji od *prostora elementarnih događaja* (*skupa svih mogućih ishoda*) Ω, od *σ-algebre* $\mathcal{F}$, što je familija podskupova od Ω koja sadrži prazan skup, zatvorena je na komplementiranje (tj. ako sadrži neki skup, sadrži i njegov komplement) i na prebrojive unije (tj. ako imamo prebrojivo mnogo skupova iz $\mathcal{F}$, onda će i njihova unija biti element od $\mathcal{F}$) i njezine elemente nazivamo *događajima*, te funkcije $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ koja zadovoljava tzv. *aksiome vjerojatnosti* i nazivamo je *vjerojatnost*. Preciznije, funkcija $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ je vjerojatnost (na Ω) ako zadovoljava sljedeće aksiome:

- $P(A) \geq 0$, za svaki $A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tada vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

koje nazivamo *nenegativnost vjerojatnosti*, *normiranost vjerojatnosti* i *σ-aditivnost vjerojatnosti*, redom.
Primijetimo da iz aksioma nenegativnosti i normiranosti vjerojatnosti slijedi nejednakost $0 \leq P(A) \leq 1$, za svaki $A \in \mathcal{F}$.
Vjerojatnosni prostor kod kojega je Ω diskretan skup (konačan ili prebrojiv), a pripadna σ-algebra je jednaka partitivnom skupu od Ω, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, nazivamo *diskretan vjerojatnosni prostor*. Pored pojma vjerojatnosnog prostora, za razumijevanje nejednakosti koje ćemo opisati u ovom članku, od velike će nam važnosti biti pojam *slučajne varijable* i njezinih *numeričkih karakteristika* te ćemo ih, u nastavku, pobliže upoznati.

Definicija 1.1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ (tj. σ-algebra generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}$[1]). Funkciju $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takvu da je skup $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ događaj iz $\mathcal{F}$, za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tj. $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, nazivamo slučajna varijabla.

U ovom kontekstu spomenimo još i *Borelovu funkciju*, koja će nam biti potrebna u nastavku, a naziv je za funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (vidi [12, str. 236, **Definicija**]).

Bitno je još napomenuti da slučajne varijable dijelimo na diskretne (kojima je skup svih vrijednosti diskretan) i neprekidne (s neprebrojivim skupom vrijednosti). U nastavku ćemo navesti njihove precizne definicije (za više detalja vidi [2, 12]).

[1] Za više detalja vidi [8, str. 19].

Definicija 1.2. Slučajna varijabla X, na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, je diskretna ako postoji konačan ili prebrojiv skup $D \subset \mathbb{R}$ takav da je

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in D\}\right) = P\left(X \in D\right) = 1.$$

Ako je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sa skupom svih vrijednosti $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ i pripadnim vjerojatnostima $\{p_i : i \in I\}$, za koje vrijedi

$$p_i = P\left(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = x_i\}\right) = P\left(X = x_i\right), \ i \in I$$

onda X prikazujemo u obliku tablice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \cdots \end{pmatrix} \tag{1}$$

i taj prikaz nazivamo *zakon razdiobe*, *tablica distribucije* ili *distribucija* slučajne varijable X. Za elemente od $\mathcal{R}(X)$ vrijedi $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, dok pripadne vjerojatnosti zadovoljavaju sljedeća dva svojstva

- $0 \leq p_i \leq 1$, za svaki $i \in I$
- $\displaystyle\sum_{i \in I} p_i = 1.$

Obratno, ako je zadana prethodna tablica, s elementima koji zadovoljavaju navedene uvjete, tada postoji diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i slučajna varijabla X na Ω tako da je (1) distribucija od X [12, str. 92].

Dakle, ukoliko je Ω diskretan skup, slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je nužno diskretna, no ukoliko Ω nije diskretan skup, funkcije definirane na njemu ne moraju nužno imati diskretan skup svih vrijednosti, iako to nije isključeno (vidi [2, str. 60]). U slučaju neprebrojivog skupa Ω zanimaju nas i neprekidne slučajne varijable.

Definicija 1.3. Funkciju $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, nazivamo neprekidna slučajna varijabla ako vrijedi sljedeće:

- $\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$, za svaki $x \in \mathbb{R}$,
- postoji nenegativna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takva da je

  $$P\left(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leq x\}\right) = P\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

  za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Funkciju f iz prethodne definicije nazivamo *funkcija gustoće slučajne varijable* X i ona zadovoljava dva bitna svojstva:

- $f(x) \geq 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

koja nazivamo *nenegativnost* i *normiranost*, redom.

Kako bi bolje opisali slučajnu varijablu, često nam pomažu za nju karakteristični brojevi koje nazivamo *numeričke karakteristike slučajne varijable.* Osnovnu numeričku karakteristiku slučajne varijable predstavlja *matematičko očekivanje*, koje ćemo najprije definirati za diskretnu slučajnu varijablu.

Definicija 1.4. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Ako red $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ apsolutno konvergira, onda kažemo da slučajna varijabla ima matematičko očekivanje i broj

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$$

nazivamo matematičko očekivanje (očekivanje) slučajne varijable X.

Kako prethodnu definiciju nije jednostavno primijeniti na računanje očekivanja u konkretnim situacijama, matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable X, s tablicom distribucije (1), (ako ono postoji) računamo na sljedeći način (vidi [2, str. 86, Teorem 2.1]

$$EX = \sum_{i\in I\subseteq\mathbb{N}} x_i p_i.$$

Ukoliko Ω nije diskretan skup, očekivanje ne definiramo u smislu prethodne definicije. Za neprekidne slučajne varijable očekivanje se definira pomoću pripadne funkcije gustoće, o čemu govori sljedeća definicija.

Definicija 1.5. Neka je X neprekidna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, s funkcijom gustoće f. Ako je integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$$

konačan, onda kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazivamo matematičko očekivanje (očekivanje) slučajne varijable X.

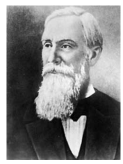
Druga bitna numerička karakteristika slučajne varijable, koja mjeri stupanj *rasipanja* vrijednosti koje poprima ta slučajna varijabla oko svog očekivanja, naziva se *varijanca* (u oznaci $\mathrm{Var}X$, σ_X^2, σ^2). Iako bi čitatelj mogao pretpostaviti da bi u prethodno opisanom kontekstu varijancu bilo prikladno definirati kao $E(X - EX)$ to ne bi bio pravi izbor, jer je ta vrijednost uvijek jednaka nuli, tj. vrijedi

$$E(X - EX) = EX - E(EX) = EX - EX = 0.$$

Također, kada bi varijancu definirali kao $E\left(|X - EX|\right)$ ta mjera ne bi imala dobra svojstva koja su bitna u teoriji vjerojatnosti (za više detalja vidi [13, str. 95]) te se pokazalo da bolja svojstva ima slučajna varijabla $(X - EX)^2$, odnosno varijanca se definira kao $E(X - EX)^2$, ako to očekivanje postoji. Pozitivan drugi korijen iz varijance nazivamo *standardna devijacija* ili *standardno odstupanje* slučajne varijable [13, str. 95].

Matematičko očekivanje slučajne varijable X možemo interpretirati kao srednju (očekivanu) vrijednost te slučajne varijable, a varijancu kao očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od njezinog očekivanja (vidi [2, str. 89], [7, str. 20–21]).

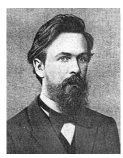
U teoriji vjerojatnosti poznata je i izreka da *iza svakog graničnog teorema stoji vjerojatnosna nejednakost* [11], odnosno veliki broj vjerojatnosnih nejednakosti otkrivene su upravo u pokušajima dokazivanja nekih od fundamentalnih teorema teorije vjerojatnosti. Tako je Čebišev dokazao čuvenu nejednakost, kasnije po njemu nazvanu *Čebiševljeva nejednakost*, kako bi dokazao opću formu *Zakona velikih brojeva* [6, str. 310] koji tvrdi da ako imamo niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ takav da su, za svaki prirodan broj n, slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ međusobno nezavisne i pri tome su im varijance uniformno ograničene, onda vjerojatnost da se realizacija prosjeka slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_n$ razlikuje od očekivanja prosjeka za više od proizvoljno izabranog malog broja, teži nuli s povećanjem broja slučajnih varijabli koje uzimamo u izračun prosjeka (za više detalja vidi [2, 6]). Samu nejednakost iskazao je najprije I.-J. Bienaymé 1853. [3], a 14 godina kasnije dokazao ju je Čebišev [15]. Maistrov u svojoj knjizi [10, str. 202] opisuje povijest nastanka Čebiševljeve nejednakosti te napominje da je ona dugo vremena nosila ime Bienaymé-Čebiševljeva nejednakost.



Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821.–1894.), ruski matematičar

Irénée-Jules Bienaymé (1796.–1878.), francuski matematičar

Markov je bio Čebiševljev učenik [10, str. 190] i dokazao je novu nejednakost koja po njemu nosi i ime, iako se može naći i u ranijim radovima Čebiševljeva i drugih. Danas u literaturi najčešće možemo pronaći dokaz Čebiševljeve nejednakosti pomoću specijalnog slučaja Markovljeve nejednakosti (vidi npr. [2, 12]) te ćemo tim redom i predstaviti naše nejednakosti u sljedećem poglavlju.



Andrey Andreyevich Markov (1856.–1922.), ruski matematičar

2 Čebiševljeva i Markovljeva nejednakost

Čebiševljeva i Markovljeva nejednakost u sebi kriju numeričke karakteristike slučajne varijable i služe kao njihova interpretacija. Uz pomoć očekivanja i varijance slučajne varijable, s kojima smo se upoznali u prethodnom poglavlju, spremni smo navesti naše nejednakosti. U svrhu dokazivanja Markovljeve nejednakosti, potrebna nam je sljedeća propozicija (vidi [12, str. 313]).

Propozicija 2.1. Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i g nenegativna Borelova funkcija takva da je $Eg(X) < \infty$. Ako je g parna funkcija i rastuća na $[0, +\infty)$, tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{Eg(X)}{g(\varepsilon)}. \tag{2}$$

Dokaz. Dokaz ćemo, zbog jednostavnosti, provesti za diskretnu slučajnu varijablu, no korištenjem Lebesgue-Stieltjesovog integrala slučajne varijable [12, str. 290, Primjedba 10.1] dokaz se može provesti za proizvoljnu slučajnu varijablu X (vidi [12, str. 313, Propozicija 10.8]).

U dokazu će nam biti potrebna indikator slučajna varijabla, koju definiramo s

$$I_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}.$$

Kako je I_A diskretna slučajna varijabla, uz oznaku $p = P(I_A = 1)$, njezinu tablicu distribucije možemo zapisati na sljedeći način

$$I_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

te je njezino očekivanje

$$\begin{aligned} EI_A &= p = P(I_A = 1) = P(\{\omega \in \Omega : \, I_A(\omega) = 1\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \, \omega \in A\}) = P(A). \end{aligned}$$

Definiramo li pomoćni događaj $A = \{\omega \in \Omega : \, |X(\omega)| \geq \varepsilon\}$, vrijedi

$$\begin{aligned} Eg(X) &= E\left(g(X)I_A + g(X)I_{A^C}\right) \\ &= E(g(X)I_A) + E(g(X)I_{A^C}) \\ &\geq E(g(X)I_A) \geq E\left(g(\varepsilon)I_A\right) \\ &= g(\varepsilon)EI_A = g(\varepsilon)P(A), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili svojstva *linearnosti* i *monotonosti* očekivanja te nenegativnosti i monotonosti funkcije g. $\square$

Markovljeva nejednakost je direktna posljedica prethodne propozicije.

Korolar 2.1 (Markovljeva nejednakost). Neka je $r > 0$ i $E(|X|^r) < \infty$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}. \tag{3}$$

U nastavku ćemo iskazati Čebiševljevu nejednakost te čitatelj može uočiti, poznavajući već navedenu činjenicu da je $\mathrm{Var}X = E(X - EX)^2$, da je ona ništa drugo no specijalan slučaj prethodnog korolara za $r = 2$ [12, str. 313, Korolar 10.4].

Korolar 2.2 (Čebiševljeva nejednakost). Neka je X slučajna varijabla s konačnim očekivanjem μ i konačnom varijancom σ^2. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Uz supstituciju $\varepsilon = k\sigma$, $k > 0$, dobivamo drugi (česti) zapis Čebiševljeve nejednakosti [2, str. 90, Propozicija 2.2]:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}. \tag{5}$$

Primijetimo da Čebiševljeva nejednakost tvrdi da je vjerojatnost da slučajna varijabla X odstupa od svog očekivanja po apsolutnoj vrijednosti za više ili jednako k standardnih devijacija, manja ili jednaka $\frac{1}{k^2}$.
U nastavku ćemo objasniti kako pomoću Čebiševljeve nejednakosti (5) i svojstva *vjerojatnosti suprotnog događaja* možemo ocijeniti i nešto drugačiju vjerojatnost.

Napomena 2.1. Vrijedi

$$P(|X - \mu| < k\sigma) = 1 - P(|X - \mu| \geq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

odnosno, vjerojatnost da slučajna varijabla odstupa od svog očekivanja za manje od k standardnih devijacija veća je ili jednaka od $1 - \frac{1}{k^2}$.

Također, ukoliko promotrimo veliki broj nezavisnih realizacija slučajne varijable X, uz pomoć prethodne nejednakosti i statističke interpretacije vjerojatnosti (vidi npr. [2]), možemo doći do sljedećih zaključaka:

- barem 75% realizacija slučajne varijable X nalazi se unutar intervala $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, što slijedi iz

$$P(X \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)) = P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75,$$

- barem 88.9% realizacija slučajne varijable X upada u interval $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$, što vidimo iz

$$P(X \in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)) = P(|X - \mu| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{3^2} \approx 0.889.$$

Nastavljajući dalje, za ostale vrijednosti $k \in \mathbb{N}$, možemo zaključiti da je za veći k veća i vjerojatnost da će se realizacija slučajne varijable nalaziti unutar intervala $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$.

Pomoću Čebiševljeve nejednakosti možemo ocijeniti i vjerojatnost [14, str. 138]

$$P(a < X < b) = P\left(\left|X - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right) \geq 1 - \frac{4\sigma^2}{(b-a)^2}, \qquad (6)$$

gdje pripadni $k > 0$ dobivamo iz jednadžbe $k\sigma = \dfrac{b-a}{2}$, a za realne brojeve a i b vrijedi $a + b = 2\mu$. Prethodna ocjena je korisna za one intervale (a, b) koji su simetrični oko očekivanja i za koje vrijedi $b - a > 2\sigma^2$.
Donja granica za vjerojatnost proizvoljnog intervala (a, b), koji nije nužno simetričan oko očekivanja, dana je s [5, 14]

$$P(a < X < b) \geq \frac{4\left((\mu - a)(b - \mu) - \sigma^2\right)}{(b-a)^2} \qquad (7)$$

i korisna je za intervale koji zadovoljavaju $a < \mu < b$ te $(\mu - a)(b - \mu) > \sigma^2$.

3 Zanimljivi primjeri

U ovom poglavlju pokušat ćemo zanimljivim primjerima iz svakodnevnoga života čitateljima približiti primjenu Čebiševljeve i Markovljeve nejednakosti.

Primjer 3.1. Ana studira na Odjelu za matematiku u Osijeku. Vrijeme je ljetnog ispitnog roka i ona se sprema za usmeni ispit iz kolegija *Uvod u* *vjerojatnost i statistiku*. Očekivani broj stranica gradiva s predavanja koje Ana dnevno nauči je deset, no kako do ispita nema puno vremena pita se može li ocijeniti vjerojatnost da će sutra uspjeti naučiti barem petnaest stranica?

Rješenje. Neka je X diskretna slučajna varijabla koja predstavlja broj stranica koje Ana dnevno nauči. Tada je $EX = 10$. Korištenjem Markovljeve nejednakosti, za $r = 1$, dobivamo

$$P(X \geq 15) \leq \frac{EX}{15} = \frac{10}{15} \approx 0.667.$$

Dakle, vjerojatnost da će Ana sutra uspjeti naučiti barem 15 stranica je manja ili jednaka 0.667. ◀

Primjer 3.2. Sljedećeg dana, Ana se na fakultetu pohvalila Ivi kako je korištenjem Markovljeve nejednakosti uspjela ocijeniti vjerojatnost koja ju je zanimala. Iva joj je na to odgovorila „Sigurno ne možeš svaki dan ispuniti svoje očekivanje i naučiti 10 stranica! Možeš li razmisliti koliko bi bilo standardno odstupanje od tog broja? Tada bi pomoću Čebiševljeve nejednakosti mogla preciznije ocijeniti željenu vjerojatnost." Nakon kratkog razmišljanja, Ana je odlučila „Mislim da je najbolje pretpostaviti kako se radi o dvije stranice standardnog odstupanja po danu, jer ako učim manje, brinem se da neću sve stići, a niti puno više od toga ne mogu planirati zbog drugih obaveza." Kolika je sada ocjena vjerojatnosti koju je Ana ocijenila dan prije?

Rješenje. Neka je X ponovo oznaka za diskretnu slučajnu varijablu koja predstavlja broj stranica koje Ana dnevno nauči. Tada je $EX = 10$ i $\mathrm{Var}X = 4$, s obzirom da je Ana pretpostavila kako standardna devijacija iznosi 2. Uz pomoć *monotonosti vjerojatnosti* i Čebiševljeve nejednakosti (5) dobivamo

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= P(X - 10 \geq 5) \leq P(\{X - 10 \geq 5\} \cup \{X - 10 \leq -5\}) \\ &= P(|X - 10| \geq 5) \leq \frac{4}{25} = 0.16. \end{aligned}$$

Možemo zaključiti da se uz poznavanje dodatne informacije o vrijednosti varijance gornja ocjena vjerojatnosti znatno smanjila. ◀

Primjer 3.3. Iznenađena značajnom promjenom ocjene vjerojatnosti, nakon što je u obzir uzela i varijancu, Ana se pita kolika će biti vjerojatnost da je broj stranica koje će dnevno stići naučiti upravo jednak očekivanom broju naučenih stranica, ako je varijanca jednaka nuli. Ona pretpostavlja da je ta vjerojatnost najveća moguća, tj. da je

$$P(X = EX) = 1.$$

Može li Ana to i dokazati uz pomoć Čebiševljeve nejednakosti?

Rješenje. Kako je $\mathrm{Var}X = \sigma^2 = 0$, iz aksioma *nenegativnosti vjerojatnosti* i Čebiševljeve nejednakosti (4) slijedi da je za svaki $n \geq 1$

$$P\left(|X - EX| \geq \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Nadalje, promotrimo li niz skupova $A_n = \{\omega \in \Omega : \ |X(\omega) - EX| \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, možemo uočiti da vrijedi

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots,$$

odnosno promatrani niz skupova je rastući, te na njega možemo primijeniti dobro poznato svojstvo vjerojatnosti tzv. *neprekidnost vjerojatnosti s obzirom na rastući niz događaja* (vidi [2])

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(|X - EX| \geq \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Iz definicije skupova A_n, $n \in \mathbb{N}$, i gornjeg razmatranja slijedi

$$P(X \neq EX) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0,$$

iz čega dolazimo do tražene tvrdnje

$$P(X = EX) = 1 - P(X \neq EX) = 1,$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili svojstvo *vjerojatnosti suprotnog događaja*. ◀

Primjer 3.4. Kako je vrijeme ispitnih rokova, Ana priprema i druge kolegije te nema vremena svaki dan učiti *Uvod u vjerojatnost i statistiku*. Ako je vjerojatnost da je svaki dan uspjela učiti taj kolegij $p = 1/2$, a do ispita je ostalo n dana, kolika je gornja granica vjerojatnosti (dobivena pomoću Markovljeve i Čebiševljeve nejednakosti) da će Ana u barem 75% dana koji su joj preostali do ispita uspjeti učiti *Uvod u vjerojatnost i statistiku*?

Rješenje. Neka je X diskretna slučajna varijabla koja predstavlja broj dana u kojima je Ana uspjela učiti dani kolegij. Kako je X binomna slučajna varijabla $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ slijedi da je $EX = np$ i $\text{Var}X = np(1-p)$. Odredimo sada gornju granicu vjerojatnosti da će broj preostalih dana u kojima će Ana učiti za spomenuti ispit biti veći ili jednak od αn, pri čemu je $\alpha = 3/4$. Primjenom Markovljeve nejednakosti dobivamo

$$P\left(X \geq \alpha n\right) \leq \frac{EX}{\alpha n} = \frac{p}{\alpha},$$

odnosno $P\left(X \geq \dfrac{3n}{4}\right) \leq \dfrac{2}{3}$.

Primjenom Čebiševljeve nejednakosti (4) dobivamo

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \alpha n\right) &= P\left(X - np \geq \alpha n - np\right) \leq P\left(|X - np| \geq \alpha n - np\right) \\ &\leq \frac{\text{Var}X}{(\alpha n - np)^2} = \frac{p(1-p)}{n(\alpha - p)^2}, \end{aligned}$$

tj. $P\left(X \geq \dfrac{3n}{4}\right) \leq \dfrac{4}{n}$. Dakle, možemo uočiti da je granica dobivena primjenom Markovljeve nejednakosti *slabija* jer je konstanta i ne mijenja se s povećanjem broja dana n, dok se ocjena tražene vjerojatnosti dobivena pomoću Čebiševljeve nejednakosti u tom slučaju smanjuje, što znači da je veća vjerojatnost kako će Ana intenzivnije učiti kolegij u slučaju manjeg broja dana koji su preostali do ispita. ◀

Primjer 3.5. Kako se bliži kraj ispitnih rokova, Ana se s prijateljima dogovara da prije raspusta zajedno odu na izlet u Kopački rit. U *Hrvatskom meteorološkom časopisu* [4, str. 66, Tablica 1] pronašli su podatak da je prosječna mjesečna temperatura zraka (u Celzijusovim stupnjevima) u Kopačkom ritu tijekom srpnja 21.9, uz standardnu devijaciju 0.9. Ana i njezini prijatelji smatraju da je temperatura iznad 20° C sasvim prihvatljiva za izlet te pomoću Čebiševljeve nejednakosti žele ocijeniti vjerojatnost da prosječna mjesečna temperatura zraka od svoje očekivane vrijednosti odstupa za manje od 1.8.

Rješenje. Neka je X neprekidna slučajna varijabla kojom je modelirana prosječna mjesečna temperatura zraka u Kopačkom ritu tijekom srpnja. Uz pomoć Čebiševljeve nejednakosti i poznatih vrijednosti za očekivanje $\mu = 21.9$ i standardnu devijaciju $\sigma = 0.9$ dobivamo

$$P(|X - 21.9| < 1.8) = P(|X - 21.9| < 2\sigma) \geq \frac{3}{4}.$$

Dakle, vjerojatnost da prosječna mjesečna temperatura zraka u srpnju odstupa od 21.9° C za manje od dvije standardne devijacije iznosi barem 0.75, što znači da se barem 75% realizacija slučajne varijable X nalazi unutar intervala (20.1, 23.7) te su Ana i prijatelji odlučili otići na izlet. ◀

Primjer 3.6. Kada se približio dan odlaska na izlet u Kopački rit, Petar se zabrinuo jer je na vremenskoj prognozi čuo kako se očekuju iznimno niske temperature za srpanj. Petar se pita kolika se prosječna temperatura zraka može očekivati tijekom srpnja, ako Čebiševljeva ocjena vjerojatnosti nije manja od 0.9.

Rješenje. Ponovno je X neprekidna slučajna varijabla kojom je modelirana prosječna mjesečna temperatura zraka u Kopačkom ritu tijekom srpnja. Uz poznate podatke iz prethodnog primjera i Čebiševljeve nejednakosti zaključujemo

$$P(|X - 21.9| < 0.9\,k) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 0.9.$$

Iz jednadžbe $1 - \dfrac{1}{k^2} = 0.9$ dobivamo da je $k = \sqrt{10} \approx 3.16$, iz čega slijedi

$$P(|X - 21.9| < 0.9\sqrt{10}) \geq 0.9 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(19.05 < X < 24.75) \geq 0.9\,.$$

Dakle, vjerojatnost da prosječna temperatura zraka u srpnju bude veća od 19.05° C, ali manja od 24.75° C veća je ili jednaka 0.9. ◀

Primjer 3.7. Nakon što je dobio rješenje primjenom Čebiševljeve nejednakosti (koju je dobro svladao nakon položenog kolegija *Uvod u vjerojatnost i statistiku*) Petar se još više brine kako će potpuno uživati u izletu ako temperatura bude manja od 20° C. „Ne budi pesimist!", veselo mu je rekla Ana i dodala „Možda na dan izleta bude zaista toplo vrijeme, možda temperatura bude i puno viša od 21.7° C!" „Nemoj pretjerivati, sigurno će temperatura biti barem niža od 27° C" dodala je Iva. Kolika je ocjena vjerojatnosti da temperatura u Kopačkom ritu, u srpnju, bude u granicama koje su predložile Ana i Iva?

Rješenje. Koristeći oznake kao u prethodna dva primjera, a ovaj put uz pomoć ocjene (7), koju možemo koristiti jer su ispunjeni uvjeti $\mu = 21.9 \in (21.7, 27)$ te $(\mu - 21.7)(27 - \mu) = 1.02 > \sigma^2 = 0.81$ dobivamo

$$P(21.7 < X < 27) \geq \frac{4(1.02 - 0.81)}{5.3^2} = 0.03.$$ ◀

Iako dobivena vjerojatnost nije obećavala visoke temperature, Ana i prijatelji su proveli topao srpanjski dan u Kopačkom ritu i nagradili se za položene ispite.

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Povijest Matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] I.-J. Bienaymé, *Considérations àl'appui de la découverte de Laplace*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **37** (1853), 309–324.

[4] L. Cvitan, *Početne naznake o prostornoj raznolikosti klime šireg područja parka prirode Kopački rit*, Hrvatski meteorološki časopis, **48/49** (2013/14), 63–91.

[5] K. Ferentinos, *On Tchebycheff's type inequalities*, Trabajos Estadíst. Investigación Oper., **33** (1982), 125–132.

[6] C. M. Grinstead, J. L. Snell, *Introduction to Probability*, American Mathematical Society, 1997.

[7] M. Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika, predavanja*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odjel, 2006.
`http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/vms.pdf`

[8] D. Jukić, *Mjera i integral*, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[9] N. Keglević, *Važne nejednakosti u teoriji vjerojatnosti*, Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2016.

[10] L. E. Maistrov, *Probability Theory: A Historical Sketch*, Academic Press, New York, 1974.

[11] L. Paninski, *Intro. Math. Stats. (nastavni materijali)*, Columbia University, New York (2005).
`http://www.columbia.edu/~kr2248/4109/inequalities-notes.pdf`

[12] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[13] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika II. dio: osnove statistike - slučajne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.

[14] K. Steliga, D. Szynal, *On Markov-type inequalities*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **58(2)** (2010), 137–152.

[15] P. L. Tchebichef, *Des valeurs moyennes*, Journal de mathématiques pures et appliquées, **2(12)** (1867), 177–184.