Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија во бројот XXVIII 5-6

Војислав Андрић (Ваљево)

КАКАВ ЈЕ ДАТИ ТРОУГАО?

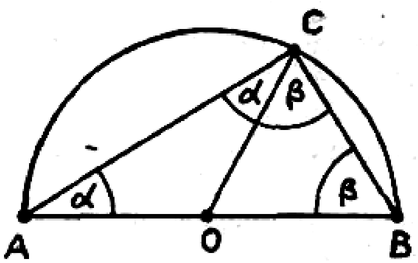
Нека су дате дужи a, b и c странице троугла ABC ($a \leq b \leq c$). Интересантно је питање какав је тај троугао: оштроугли, правоугли или тупоугли? Интересантно је и питање како овај проблем решити конструктивно, а како рачунски?

Алгоритми за решавање ових проблема су директне последице следећих теорема:

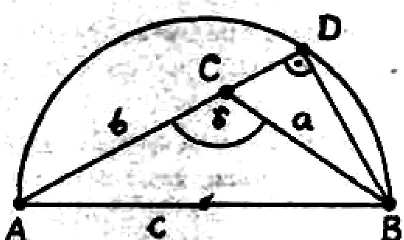
Теорема 1. Нека је k круг конструисан над највећом страницом $c = AB$ троугла ABC као пречником. Тада важе тврђења:

(а) Ако је тачка C на кругу k, онда је троугао ABC правоугли.
(б) Ако је тачка C унутар круга k, онда је троугао ABC тупоугли.
(в) Ако је тачка C изван круга k, онда је троугао ABC оштроугли.
У сваком од ових случајева важи и обрнуто тврђење.

Доказ. (а) Нека је O центар круга k чији је пречник AB и нека $C \in k$, сл. 1. Тада су троуглови AOC и BOC једнакокраки, јер је $OA = OB = OC$. Ако означимо $\sphericalangle CAO = \alpha$ и $\sphericalangle CBA = \beta$, тада је и $\sphericalangle ACO = \alpha$ и $\sphericalangle BCO = \beta$. Збир углова троугла ABC је $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$. Одатле следи да је $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta = 90°$, тј. троугао ABC је правоугли са правим углом код темена C.



Сл. 1



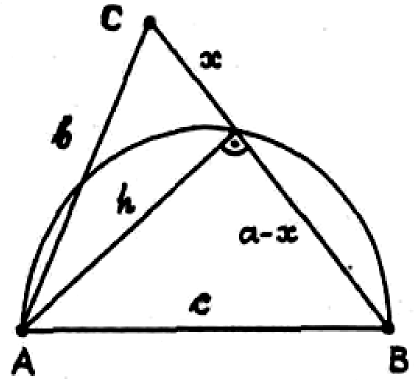
Сл. 2

(б) Нека је тачка C унутар троугла ABC и нека је $AC \cap k = \{D\}$, сл. 2. На основу тврђења под (а) добијамо да је $\sphericalangle ADB = 90°$. Угао

$\gamma = \sphericalangle ACB$ је спољашњи угао троугла. На основу тога добијамо да је

$$\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB + \sphericalangle CBD = 90^\circ + \sphericalangle CBD > 90^\circ.$$

Према томе, $\sphericalangle ACB$ је туп угао, тј. троугао ABC је тупоугли.



Сл. 3

(в) Нека је тачка C изван круга k и нека је $BC \cap k = \{D\}$, сл. 3. Тада је троугао ADC правоугли са правим углом код темена D. Заиста, на основу тврђења под (а) добијамо да је $\sphericalangle ADB = 90^\circ$, па даље следи $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ADB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Даље добијамо

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD &= 180^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle CAD \\ &= 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle CAD = 90^\circ - \sphericalangle CAD < 90^\circ. \end{aligned}$$

С обзиром да је c најдужа страница троугла ABC, то је $\sphericalangle ACB$ највећи угао. Према томе, троугао ABC је оштроугли.

Теорема 2. Нека су a, b, c мерни бројеви страница троугла ABC и нека је $a \leq b \leq c$. Тада важе тврђења:

(а) Ако је $a^2 + b^2 = c^2$, онда је троугао ABC правоугли. (б) Ако је $a^2 + b^2 < c^2$, онда је троугао ABC тупоугли. (в) Ако је $a^2 + b^2 > c^2$, онда је троугао ABC оштроугли.

Доказ. (а) Исказ овог дела теореме је општепозната обрнута Питагорина теорема, па је овде нећемо доказивати.

Пре доказа тврђења под (б) и (в) приметимо следеће:

Из правоуглог троугла ABD на сл. 2 добијамо $(b+x)^2+h^2=c^2$, а из правоуглог троугла BCD на истој слици добијамо $h^2+x^2=a^2$. Елиминацијом h^2 из ове две једнакости добијамо да је $a^2+b^2=c^2-2bx$, па даље следи $a^2+b^2<c^2$. Према томе, ако је ABC тупоугли троугао са тупим углом код темена C, онда важи неједнакост $a^2+b^2<c^2$.

Слично из правоуглих троуглова ADC и ABD на сл. 3 добијамо $h^2=b^2-x^2=c^2-(a-x)^2$, одакле следи да је $c^2+2ax=a^2+b^2$, тј. код оштроуглог троугла ABC важи неједнакост $a^2+b^2<c^2$.

(б) Нека је $a^2+b^2<c^2$. Тада троугао ABC не може бити правоугли, јер би у том случају важило $a^2+b^2=c^2$. Тај троугао не може бити ни оштроугли, јер би према реченом у том случају важила неједнакост $a^2+b^2>c^2$. Према томе, троугао ABC је тупоугли.

(в) Тврђење се доказује аналогно као и тврђење под (б).

Наводимо неколико примера у којима се користе ове теореме:

Пример 1. Дужине страница троугла су $5\,cm$, $6\,cm$ и $7\,cm$. Да ли је тај троугао тупоугли?

Како је $5^2+6^2=25+36=61>49=7^2$, то је дати троугао оштроугли.

Пример 2. Одредити све тупоугле троуглове чије су дужине страница узастопни природни бројеви.

Нека су дужине страница тупоуглог троугла једнаке $n-1$, n, $n+1$, где је $n\geq 2$ природан број. Тада важи неједнакост $(n-1)^2+n^2<(n+1)^2$, одакле следи неједнакост $n^2-4n<0$, тј. $n(n-4)<0$ и коначно $n<4$. Ако је $n=2$, онда је $n-1=1$ и $n+1=3$, а бројеви 1, 2 и 3 не могу бити странице троугла. За $n=3$ добијамо као једино решење троугао чије су странице 2, 3 и 4.

Пример 3. Ако су a, b и c дужине страница троугла и ако је $a^4+b^4=c^4$, онда је тај троугао оштроугли. Доказати.

Ако је $a^4+b^4=c^4$, онда је c најдужа страница троугла и важи $(a^2+b^2)^2=a^4+2a^2b^2+b^4>a^4+b^4=c^4=(c^2)^2$, одакле следи да је $a^2+b^2>c^2$. На основу теореме 2 следи да је дати троугао оштроугли.

Пример 4. Дат је правоугли троугао са катетама a и b и хипотенузом c. Доказати да за сваки природан број n $(n \geq 3)$ важи неједнакост $a^n + b^n < c^n$.

Катете су мање од хипотенузе, тј. $a < c$ и $b < c$. Користећи ове неједнакости и Питагорину теорему добијамо

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} < a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} \\ &= (a^2 + b^2) \cdot c^{n-2} = c^2 \cdot c^{n-2} = c^n, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Пример 5. Ако су a, b и c мерни бројеви страница троугла и ако је $a^{1994} + b^{1994} = c^{1994}$, онда је дати троугао оштроугли. Доказати.

Ако је $a^{1994} + b^{1994} = c^{1994}$, онда је $a < c$ и $b < c$, па следи да је

$$\begin{aligned} c^{1994} &= a^{1994} + b^{1994} = a^2 \cdot a^{1992} + b^2 \cdot b^{1992} \\ &< a^2 \cdot c^{1992} + b^2 \cdot c^{1992} = (a^2 + b^2) \cdot c^{1992}. \end{aligned}$$

Следи да је $c^{1994} < (a^2 + b^2) \cdot c^{1992}$, тј. $c^2 < a^2 + b^2$. Из теореме 2 следи да је дати троугао оштроугли.

Задаци

1. Одреди да ли је правоугли, оштроугли или тупоугли троугао чије су странице:

(а) 19, 20, 21;
(б) 10, 24, 26,
(в) 5, 7, 11.

2. Одреди све природне бројеве n, тако да је троугао чије су странице $n-1$, n, $n+1$, где је n природан број већи од 1, правоугли.

3. Одреди какав је троугао, ако су мерни бројеви његових страница једнаки $2n$, $2n+2$ и $2n+4$, где је n природан број већи од један.