Коментар једног задатка П. Ердеша

Боривој Суботић, Гимназија "Јован Јовановић Змај", Нови Сад

Познат је следећи задатак П. Ердеша: *У сваком нетупоуглом троуглу важи неједнакост*

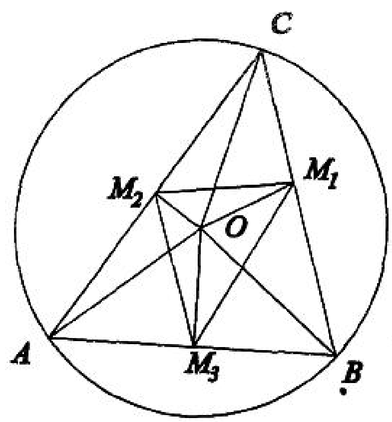
$$R + r \leq h_c,$$

где је R – полупречник кружнице описане око троугла, а r – полупречник кружнице уписане у тај троугао, h_c–највећа висина тог троугла.

Наведимо решење тог задатка и напишимо у другом облику неједнакост из услова задатка.

Центар O описане кружнице око троугла ABC лежи у његовој унутрашњости или на његовој страници.

Из тачке O спустимо нормале OM_1, OM_2, OM_3 на странице троугла (види слику) и применимо теорему Птолемеја на четвороуглове OM_1CM_2, OM_2AM_3, $0M_3BM_1$.



Добијамо редом:

$$OM_1\frac{b}{2} + OM_2\frac{a}{2} = R\frac{c}{2},$$

$$OM_2\frac{c}{2} + OM_3\frac{b}{2} = R\frac{a}{2},$$

$$OM_3\frac{a}{2} + OM_1\frac{c}{2} = R\frac{b}{2},$$

Сабирајући редом те једнакости добијамо:

$$OM_1 \cdot p + OM_2 \cdot p + OM_3 \cdot p - (OM_1\frac{a}{2} + OM_2\frac{b}{2} + OM_3\frac{c}{2}) = R \cdot p,$$

где је p–полуобим троугла.

Даље следи да је

$$(OM_1 + OM_2 + OM_3)p - S = Rp,$$

где је S површина троугла.

Ставимо $S = rp$, па скратимо обе стране једнакости са p. Тада је $R + r = OM_1 + OM_2 + OM_3$.

Како је $S_{OAB} = \frac{1}{2}cOM_3$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}ch_c$, можемо добити

$$S_{OAB} : S_{ABC} = OM_3 : h_c$$

или

$$OM_3 = \frac{S_{OAB}h_c}{S_{ABC}}$$

Аналогно је

$$OM_1 = \frac{S_{OBC}h_a}{S_{ABC}}, \quad OM_2 = \frac{S_{OCA}h_b}{S_{ABC}}.$$

После сабирања тих једнакости добијамо:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r = \frac{1}{S_{ABC}}(h_a S_{OBC} + h_b S_{OCA} + h_c S_{OAB}).$$

По услову задатка је $h_a \leq h_c$, $h_b \leq h_c$. Зато је $R + r \leq \frac{h_c}{S_{ABC}}(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}) = h_c$, чиме је доказ завршен.

Из доказане неједнакости следи да је $R \leq \frac{2S}{c} - \frac{S}{p} = \frac{S}{pc}(a + b) = \frac{a+b}{c}r$, па је $\frac{R}{r} \leq \frac{a+b}{c}$, где је c–најмања страница датог троугла.

Међутим, како је познато да је $R \leq 2r$ (нпр. као последица Ојлерове формуле $OI^2 = R^2 - 2Rr$, где је I–центар описане кружнице), неједнакост се може добити и коришћењем идентитета $r = 4R \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$, где су x, y и z углови троугла, и познате неједнакости $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Коначно добијамо

$$2 \leq \frac{r}{R} \leq \frac{a+b}{c}.$$

Знак једнакости важи само за једнакостранични троугао.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2000/01 година