Сојузен натпревар 1968

II година

1. Определи ги сите целобројни решенија на равенката

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}.$$

Решение. Левата страна на равенката е определена за $x \geq \frac{1}{5}, y \geq \frac{1}{5}$, а како $x, y \in \mathbb{Z}$, добиваме $x \geq 1, y \geq 1$. Исто така мора да важи $x-\frac{1}{5} \leq 5, y-\frac{1}{5} \leq 5$, односно $x \leq 5, y \leq 5$. Сега, да ги побараме решенијата на равенката за кои $x \leq y$. Воведуваме смена $y=x+k$, па затоа треба да ги побараме решенијата на равенката

$$\sqrt{x+k-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{x-\frac{1}{5}},$$

за кои $x \in \{1,...,5\}, k \in \{0,...,5-x\}$. Последната равенка, по двократно квадрирање, се сведува на равенката

$$x=\frac{k^2-10k+29}{20},$$

која при дадените услови има единствено решение $x=1, k=1$. Според тоа, единствени можни решенија на почетната равека се $x=1, y=2$ и $x=2, y=1$. Непосредно се проверува дека тие навистина се решенија на почетната равенка.

2. Во рамнината се дадени четири точки A, B, C, D. Во оваа рамнина конструирај кружница која минува низ точките A и B така што тангентните отсечки конструирани од точките C и D се еднакви.

Решение. За да тангентните отсечки од точките C и D на некоја кружница се еднакви потребно и доволно е точките C и D да се еднакво оддалечени од центарот на таа кружница. Според тоа, центарот на бараната кружница припаѓа на симетралата на отсечката CD, т.е. се наоѓа во пресекот на симетралите на отсечките AB и CD.

Конструкцијата и доказот му ги препуштаме на читателот за вежба. Задачата има решение ако симетралите на отсечките AB и CD имаат една или повеќе заеднички точки и ако кружницата со центар во некоја од тие точки која ги содржи A и B во својата внатрешност не ги содржи точките C и D.

3. Сфера ги содржи средините на бочните рабови на тристрана пирамида и го допира секој раб на основата во неговата средина.

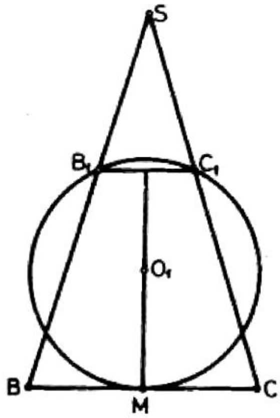
а) Докажи дека таа пирамида е правилна.

б) Определи го радиусот на таа сфера, ако основните рабови и висината на бочните ѕидови на пирамидат се еднакви на дадена отсечка a.

Решение. а) Нека $SABC$ е дадената пирамида (со врв S), A_1, B_1, C_1, M, N, P се редоследно средините на отсечките SA, SB, SC, BC, CA, AB. Понатаму, нека s е дадената сфера и k и k_1 се редоследно нејзините пресеци со рамнините ABC и B_1MC_1. Бидејќи правите BC, CA и AB се тангенти на сферата s, тие се тангенти и на кружницата k (соодветно во точките M, N и P). Затоа

$$AB = 2AP = 2AN = AC = 2CN = 2CM = BC,$$

т.е. триаголникот ABC е рамностран. Понатаму, ако O_1 е центар на кружницата k_1, тогаш точките B и B_1 се симетрични на точките C и C_1 во однос на правата O_1M (цртеж десно), па следува $B_1B = C_1C$, т.е. $SB = SC$. Аналогно се докажува дека $SA = SB$, со што е докажано дека пирамидата $SABC$ е правилна.



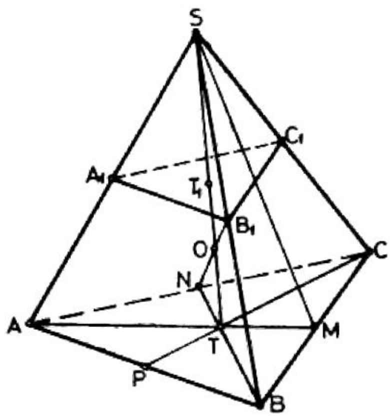
б) Нека O е центарот на дадената сфера, R е нејзиниот радиус, T и T_1 се тежиштата на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, $h = ST$, $y = OT$, $a = AB = SM$ (цртеж десно). Тогаш

$$h^2 = SM^2 - MT^2 = a^2 - (\tfrac{1}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \tfrac{11}{12}a^2.$$

Бидејќи триаголниците OTP и OT_1A_1 се правоаголни (со прави агли во темињата T и T_1), добиваме

$$R^2 = OT^2 + TP^2 = OT_1^2 + A_1T_1^2,$$

$$y^2 + (\tfrac{1}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2 = (\tfrac{h}{2} - y)^2 - (\tfrac{2}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{4})^2.$$



Понатаму, лесно добиваме дека $y = \frac{h}{2} - y$, т.е. $y = \frac{h}{4}$ и $R = \frac{3a}{8}$.

4. Определи ги сите реални броеви a, за кои ниту еден број x за кој важи

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$$

не е по апсолутна вредност поголем од 2.

Решение. За дадено $a \geq 0$ секогаш постојат реални вредности за x со произволно голема апсолутна вредност кои ја задоволуваат дадената неравенка. Затоа нека претпоставиме дека $a < 0$. Тогаш условот наведен во задачата е еквивалентен на условот двата корени на равенката

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a = 0$$

по апсолутна вредност да се помали или еднакви на 2 (лесно се проверува дека нејзините корени се секогаш реални и различни). Бидејќи тие корени се $x_1=a$ и $x_2=-\frac{1}{a}$, добиваме дека наведениот услов е исполнет ако и само ако $-2\le a\le -\frac{1}{2}$.

III година

1. Реши го системот равенки

$$x^m=y^n,$$
$$\log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

Решение. Системот има смисла ако и само ако $m,n\in\mathbb{R}$ и $a>0, a\ne 1$. Притоа непознатите треба да ги задоволуваат условите $x,y>0$ и $x\ne 1$. Воведуваме смена $\log_a x=u, \log_a y=v$, со што дадениот систем го добива видот

$$mu=nv, u-v=\frac{u}{v}. \qquad (1)$$

Во случајот ако $m=0$ мора да е и $n=0$ (не е можно $v=0$). Тогаш системот се сведува на равенката $u-v=\frac{u}{v}$, чии решенија се паровите од облик $(\frac{v^2}{v-1},v)$, за $v\ne 1$, па во овој случај решенијата на дадениот систем се паровите од видот

$$(y^{\frac{\log_a y}{\log_a y-1}},y),\ \ y>0, y\ne 1, y\ne a.$$

Да претпоставиме дека $m\ne 0$. Тогаш решавајќи го системот (1) добиваме дека за $m=n$ истиот нема решение, а за $m\ne n$ решение е парот $(\frac{n^2}{m(n-m)},\frac{n}{n-m})$. Тогаш решението на дадениот систем е $(a^{\frac{n^2}{m(n-m)}},a^{\frac{n}{n-m}})$.

2. Во рамнината xOy определи множество точки (x,y) за чии координати важи $0\le x\le 2\pi$ и

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})\le y\le 1+\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 4x}+\sqrt{1-\sin 4x}).$$

Решение. Дадената релација може да се запише во видот

$$\frac{1}{2}(|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}|-|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}|)\le y\le 1+\frac{1}{2}(|\sin 2x+\cos 2x|+|\sin 2x-\cos 2x|).$$

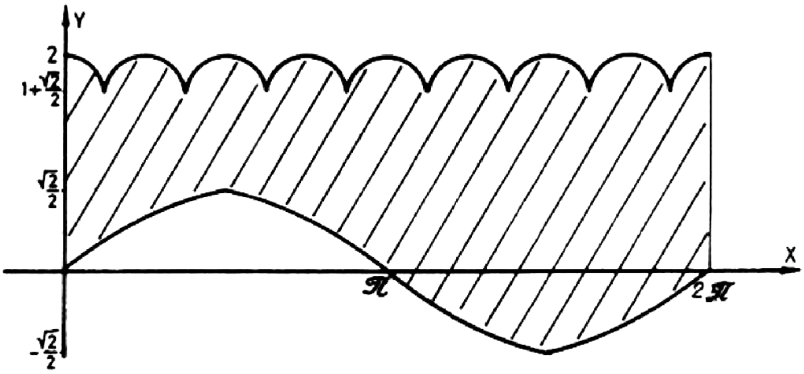
Левата страна на ова двојно неравенство има вредности

$$L=\begin{cases}\sin\frac{x}{2}, & x\in[0,\frac{\pi}{2}],\\ \cos\frac{x}{2}, & x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}),\\ -\sin\frac{x}{2}, & x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi],\end{cases}$$

а десната страна има вредности

$$D=\begin{cases}1+\cos 2x, & x\in[0,\frac{\pi}{8}]\cup(\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8}]\cup(\frac{15\pi}{8},2\pi],\\ 1+\sin 2x, & x\in(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8})\cup(\frac{9\pi}{8},\frac{11\pi}{8}],\\ 1-\cos 2x, & x\in(\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8}]\cup(\frac{11\pi}{8},\frac{13\pi}{8}],\\ 1-\sin 2x, & x\in(\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8})\cup(\frac{13\pi}{8},\frac{15\pi}{8}].\end{cases}$$

Множеството точки во рамнината xOy за кои $0\le x\le 2\pi$ и $L\le y\le D$ е прикажано на долниот цртеж.



3. Краците на прав агол со фиксирано теме во координатниот почеток ја сечат параболата $y^2=2px$ во точките X и Y.

а) Определи го геометриското место на можните средини на отсечките XY.

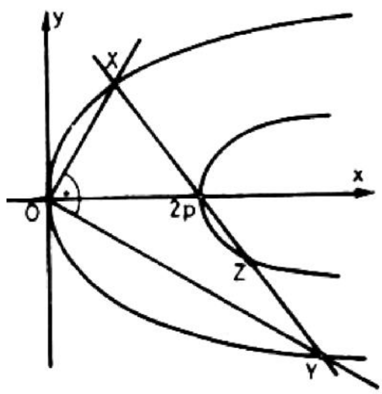
б) Докажи дека правите XY имаат една заедничка точка.

Решение. а) Нека правата OX има равенка $y=tx, t>0$. Тогаш правата OY има равенка $y=-\frac{1}{t}x$. Нивните пресеци со дадената парабола (различни од точката O) имаат координати

$$X(\frac{2p}{t^2},\frac{2p}{t}),\ Y(2pt^2,-2pt).$$

Затоа средината Z на отсечката XY има координати:

$$x=p(t^2+\frac{1}{t^2}),\ y=p(-t+\frac{1}{t}).$$



Ако го елиминираме параметарот t ја добиваме равенката на бараното геометриско место

$$y^2=p(x-2p).$$

Лесно се проверува дека секоја точка од оваа парабола е средина на една од опишаните отсечки XY.

б) Правата XY има равенка

$$(x-\tfrac{2p}{t^2}):(t^2-\tfrac{1}{t^2})=(y-\tfrac{2p}{t}):(-t-\tfrac{1}{t}).$$

Непосредно се проверува дека оваа равенка, за произвоно t, ја задоволуваат координатите на точката $(2p,0)$.

4. Прво докажи го идентитетот

$$(x+y+z)^2=\tfrac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)+3(xy+yz+zx)$$

а потоа:

а) Ако збирот $x+y+z$ има константна вредност s, определи при кои услови изразот $xy+yz+zx$ има најголема можна вредност.

б) Користејќи го добиениот резултат реши го следниов проблем: Познато е дека вредноста на дијаматот е пропорционална со квадратот на неговата маса. Ако еден дијамант се подели на три дела, чии маси се x,y,z, докажи дека вкупната вредност е секогаш помала од вредноста на целиот дијамант и дека таа е најмала кога дијамантот ќе се подели на три еднакви дела.

Решение. а) Од дадениот идентитет, кој се докажува со непосредна проверка, следува

$$xy+yz+zx=\tfrac{1}{3}[(x+y+z)^2-\tfrac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\le\tfrac{1}{3}s^2,$$

при што равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{s}{3}$. Според тоа, бараната најголема можна вредност е еднаква на $\frac{1}{3}s^2$ и таа се достигнува за $x=y=z=\frac{s}{3}$.

б) Тврдењето следува од двојното неравенство

$$(x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\ge s^2-\tfrac{2}{3}s^2=\tfrac{1}{3}s^2,$$

при што во левото неравенство знак за равенство важи ако и само ако два од броевите x,y,z се еднакви на нула, а во десното неравенство знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{s}{3}$.

IV година

1. Нека p и q се прости броеви, бројот q^3-1 е делив со p, а бројот $p-1$ е делив со q. Докажи дека $p=1+q+q^2$.

Решение. Од $q\,|\,p-1$ следува $q<p$, па како p е прост број, од $p>q-1$ и $p\,|\,q^3-1=(p-1)(p^2+p+1)$ следува $p\,|\,q^2+q+1$. Нека $q^2+q+1=kp$ и спротивно на тврдењето $k>1$. Тогаш од $q\,|\,p-1$ следува $p-1=lq$ за некој $l\in\mathbb{N}$, па затоа

$$q^2+q+1=k(lq+1)=klq+k\,.$$

Оттука следува $q\,|\,k-1$, па е $k\ge q+1$. Но, тогаш

$$q^2+q+1\ge(q+1)(lq+1)\ge q^2+2q+1,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $k=1$ и $p=1+q+q^2$.

2. Во едно одделение има 25 ученици. Докажи дека од нив не може да се формираат повеќе од 30 кошаркарски екипи со по 5 играчи во секоја, ако било кои две екипи немаат повеќе од еден играч кој е член и на двете екипи.

Решение. Нека при дадените услови може да се формираат n екипи. Да ги воочиме сите двоелементни подмножества од множеството од 25 ученици, кои ги има $\binom{25}{2}=300$. Секоја од овие n екипи содржи по $\binom{5}{2}=10$ такви двоелементни подмножества. Според условот на задачата два пара од различни екипи се различни, па затоа мора да важи $10n\le 300$, т.е. $n\le 30$.

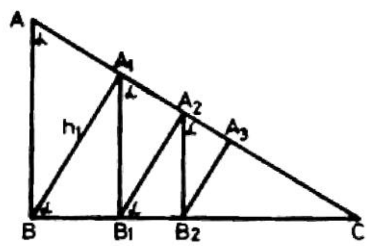
Забелешка. Може да се докаже дека на опишаниот начин може да се формираат 30 екипи, т.е. дека $n=30$.

3. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето B, дадени се аголот α во темето A и висината повлечена кон хипотенузата $BA_1=h_1$. Од точката A_1 е повлечена нормала A_1B_1 на BC, од точката B_1 нормала B_1A_2 на AC, од точката A_2 нормала A_2B_2 на BC итн. Потоа во секој од триаголниците ABA_1, BA_1B_1, $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$ итн. е впишан круг.

а) Определи го збирот на плоштините на сите впишани кругови.

б) Определи го аголот α така да овој збир биде максимален.

Решение. а) Лесно се покажува дека радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со хипотенуза c и остар агол α е еднаков на $\frac{c}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. Дадените триаголници



$$ABA_1,\ BA_1B_1,\ A_1B_1A_2,\ B_1A_2B_2,\ldots$$

се правоаголни со остар агол α и хипотенузи соодветно еднакви на

$$\frac{h_1}{\sin\alpha},\ h_1,\ h_1\sin\alpha,\ h_1\sin^2\alpha,\ldots.$$

Затоа бараниот збир на плоштините на нивните впишани кружници е

$$\begin{aligned}S&=\frac{\pi}{4}h_1^2(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+1+\sin^2\alpha+\ldots\right)\\&=\frac{\pi}{4}h_1^2\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2.\end{aligned}$$

б) Изразот во последната заграда на интервалот $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ има максимум за $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и овој максимум е еднаков на $4(3-2\sqrt{2})$, па затоа $S=\pi h_1^2(3-2\sqrt{2})$.

4. Иста како 4-тата задача од III година.

Мала олимпијада

1. Во рамнината се дадени 6 точки и секои две од нив се поврзани со отсечка. Докажи дека односот на должината d на најдолгата од нив отсечка спрема должината δ на најкратката од нив отсечка не е помал од $\sqrt{3}$.

Решение. Прво да претпоставиме дека постојат три од дадените шест точки (нека се тоа A,B,C) кои припаѓаат на една права и нека B е меѓу A и C. Тогаш

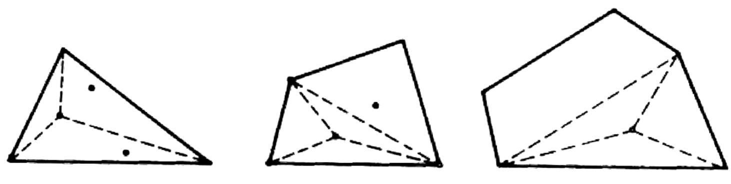
$$d\geq AC\geq 2\min\{AB,BC\}\geq 2\delta,$$

од каде следува $\frac{d}{\delta}\geq 2>\sqrt{3}$.

Нека сега меѓу дадените точки не постојат три колинеарни. Ќе докажеме дека некои три од нив формираат триаголник во кој еден агол е поголем или еднаков на 120°.

Да ја формираме конвексната обвивка на дадените шест точки, т.е. најмалото конвексно множество кое ги содржи шесте точки. Таа може да биде триаголник, четириаголник, петаголник или шестаголник. Посебно ќе го разгледаме секој од овие случаи.

Во случај кога конвексната обвивка е триаголник, четириаголник или петаголник (цртеж долу), барем една од дадените точки лежи во внатрешноста на обвивката, па затоа постои триаголник чии темиња се дадените точки, во кој се наоѓа една од дадените точки. Ако оваа точка ја поврземе со темињата на триаголникот во кој се наоѓа, тогаш збирот на трите агли чие теме е воочената точка ќе биде 360°, па затоа барем еден од нив ќе биде поголем или еднаков на 120°. Соодветниот триаголник ги задоволува бараните услови.



Ако дадените шест точки формираат конвексен шестаголник, тогаш збирот на аглите на шестаголникоте 720°, па затоа барем еден од нив е поголем или еднаков на 120°.

Сега да го воочиме триаголникот чија егзистенција ја докажавме. Нека неговите темиња се A,B,C и нека $\measuredangle BCA>120^\circ$. Тогаш

$$d \geq AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \measuredangle BCA} \geq \sqrt{\delta^2 + \delta^2 + 2\delta^2 \cdot \tfrac{1}{2}} = \delta\sqrt{3}\,.$$

Забелешка. Докажаната оценка $\frac{d}{\delta} \geq \sqrt{3}$ не е најдобрата можна оценка. Може да се докаже дека важи $\frac{d}{\delta} \geq 2\cos 18^\circ \approx 1{,}90$, при што знак за равенство се достигнува ако пет од дадените точки се темиња на правилен петаголник, а шестата точка е неговиот центар на опишаната (впишаната) кружница.

2. За да природниот број $n > 3$ е прост потребно и доволно е да постои природен број α таков што $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$. Докажи!

Решение. *Условот е доволен.* Нека за некој $\alpha \in \mathbb{N}$ е исполнето

$$n! = n(n-1)(\alpha n + 1)\text{, т.е. } (n-2)! = \alpha n + 1,$$

и нека n не е прост број. Ако p е било кој делител на n, тогаш $1 < p < n-2$, па значи $n \mid (n-2)!$. Меѓутоа $p \mid n$, па затоа αn не е делив со p, што е противречност.

Условот е потребен. Ќе докажеме две помошни тврдења.

а) Ако $(a,m) = 1$, $a, m \in \mathbb{N}$, тогаш броевите $a, 2a, \dots, ma$ земени во некој редослед при делење со m даваат остатоци $0, 1, 2, \dots, m-1$.

Навистина, ако ka и la, $k \neq l$ даваат ист остаток, тогаш $m \mid (k-l)$, што е противречност.

б) Ако p е прост број, тогаш за секој k, $2 \leq k \leq p-2$ постои l, $2 \leq l \leq p-2$, таков што $p \mid (kl-1), k \neq l$.

Според а) броевите $k, 2k, \dots, pk$, $2 \leq k \leq p-2$, земени во некој редослед, при делење со p даваат остатоци $0, 1, 2, \dots, p-1$. Меѓутоа

$$p \nmid (k-1), p \nmid pk, p \nmid (p-k-1),$$

па значи еден и само еден од броевите kl, $l = 2, 3, \dots, p-2$, при делење со p дава остаток 1. Притоа $k \neq l$ бидејќи ако $k = l$, тогаш

$$p \mid (k^2 - 1) = (k-1)(k+1),$$

што противречи на $2 \leq k \leq p-2$ и p е прост број.

Од тврдењето б) имаме, ако p е прост број тогаш множителите $2, 3, \dots, n-2$ на производот $(n-2)!$ можеме да ги поделиме на $\frac{n-3}{2}$ парови, такви што производот на секој од паровите при делење со n дава остаток 1. Затоа $n \mid ((n-2)! - 1)$, т.е. постои $\alpha \in \mathbb{N}$ таков што $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$.

3. Секоја од страните BC, CA, AB на триаголникот ABC е поделена на три еднакви отсечки и над средната отсечка на секоја страна надвор од триаголникот

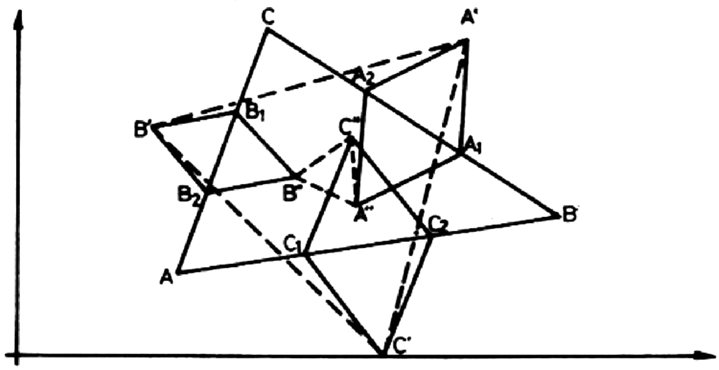
ABC е конструиран рамностран триаголник. Темињата на овие триаголници кои не припаѓаат на страните на дадениот триаголник се означени со A',B',C'. Нека A'',B'',C'' се соодветно симетричните точки на точките A',B',C' редоследно во однос на страните BAC,CA,AB. Докажи:

а) Триаголниците $A'B'C'$ и $A''B''C''$ се рамнострани.

б) Траголниците ABC, $A'B'C'$ и $A''B''C''$ имаат заедничко тежиште.

Решение. а) Нека дадениот триаголник се наоѓа во комплексната рамнина и нека неговите темиња A,B,C имаат афикси a,b,c. Тогаш точките C_1 и C_2 (види цртеж) соодветно имаат афикси

$$a+\frac{b-a}{3}=\frac{2a+b}{3} \text{ и } \frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}=\frac{a+2b}{3}.$$



Точката C' се добива со ротација на точката C_2 околу точката C_1 за агол $-\frac{\pi}{3}$, па затоа таа има афикс $\frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$. На сличен начин се добива дека афиксите на точките A',B',A'',B'',C'' се:

$$A': \quad \frac{2b+c}{3}+\frac{c-b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$B': \quad \frac{2c+a}{3}+\frac{a-c}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$A'': \quad \frac{2b+c}{3}+\frac{c-b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$B'': \quad \frac{2c+a}{3}+\frac{a-c}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$C'': \quad \frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Со ротација на точката B' околу точката A' за агол $\frac{\pi}{3}$ се добива точката чиј афикс е

$$\frac{2b+c}{3}+\frac{c-b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})+\frac{c+a-2b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})+\frac{a+b-2c}{3}=\frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$$

односно точката C'. Затоа триаголникот $A'B'C'$ е рамностран. На сличен начин се докажува дека и триаголникот $A''B''C''$ е рамностран.

б) Тежиштето T на триаголникот ABC има афикс $\frac{1}{3}(a+b+c)$, тежиштето T' на триаголникот $A'B'C'$ има афикс

$$\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3a+3b+3c}{3}+\tfrac{b-a+c-b+a-c}{3}(\cos\tfrac{\pi}{3}-i\sin\tfrac{\pi}{3})\right)=\tfrac{1}{3}(a+b+c),$$

а ист афикс има и тежиштето T'' на триаголникот $A''B''C''$, со што е докажано тврдењето на задачата.

4. Ако полином со степен n прима целобројни вредности за вредностите $k,k+1,...,k+n$ на променливата x, каде k е цел број, тогаш тој полином прима целобројни вредности за секој цел број x. Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $k=0$ (во спротивно наместо дадениот полином P кој прима целобројни вредности во точките $k,k+1,...,k+n$, ќе го разгледуваме полиномот $P_1(x)=P(x+k)$ кој прима целобројни вредности во точките $0,1,...,n$).

Јасно, ако полином од прва степен во точките 0 и 1 прима целобројни вредности, тогаш тој прима целобројни вредности за секој цел број.

Нека претпоставиме дека секој полином Q со степен $n-1$ кој во точките $0,1,...,n-1$ прима целобројни вредности, прима целобројни вредности во сите целобројни точки. Нека P е полином од $n-$ти степен таков што $P(0),P(1),...,$ $P(n)$ се цели броеви. Тогаш

$$Q(x)=P(x+1)-P(x)$$

е полином од $(n-1)-$ви степен таков што

$$Q(0)=P(1)-P(0),\ Q(1)=P(2)-P(1),...,Q(n-1)=P(n)-P(n-1)$$

се цели броеви. Од индуктивната претпоставка следува дека полиномот Q прима целобројни вредности за секој цел број x. Но, оттука следува дека полиномот P го има истото својство. На пример, тоа може да се заклучи со индукција по $x\in\mathbb{Z}$, бидејќи $P(n+1)=P(n)+Q(n)$ и $P(-1)=P(0)-Q(-1)$ итн.

5. Нека n е природен број поголем од 1, а x е реален број.

а) Пресметај

$$S(x,n)=\sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{n}(x+p)(x+q).$$

б) Дали постојат цели броеви x, за кои $S(x,n)=0$.

Решение. а) Дадениот збир да го запишеме во видот

$$S(x,n)=\sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{n}(x+p)(x+q)=\sum_{\substack{p,q=1\\ p\neq q}}^{n}(x^2+(p+q)x+pq)=Ax^2+Bx+C,$$

каде A,B,C се коефициенти кои треба да се определат. Парови (p,q) такви што $p,q\in\{1,2,...,n\}$ и $p\neq q$ има n^2-n, па затоа $A=n^2-n$. За да го пресметаме коефициентот B, да ги подредиме сите збирови во табела која што е прикажано на долниот цртеж:

q						
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\dots$	$2n-1$	$2n$
$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$\dots$	$2n-2$	$2n-1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
3	4	5	6	$\dots$	$n+2$	$n+3$
2	3	4	5	$\dots$	$n+1$	$n+2$
1	2	3	4	$\dots$	n	$n+1$
	1	2	3		$n-1$	n $\quad p$

Оттука лесно се добива дека

$$B=2+2\cdot 3+...+(n-1)n+n(n+1)+(n-1)(n+2)+...+2(2n-1)+2n-(2+4+...+2n)$$
$$=(2+2n)+2(2+2n)+3(2+2n)+...+(n-1)(2+2n)+n(n+1)-2(1+2+...+n)$$
$$=2(n+1)(1+2+...+(n-1))+n(n+1)-2\tfrac{n(n+1)}{2}$$
$$=2(n+1)\tfrac{(n-1)n}{2}=(n-1)n(n+1).$$

На сличен начин, користејќи ја долната табела

q						
n	n	$2n$	$3n$	$\dots$	$(n-1)n$	n^2
$n-1$	$n-1$	$2n-2$	$3n-3$	$\dots$	$(n-1)^2$	$(n-1)n$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
3	3	6	9	$\dots$	$3n-3$	$3n$
2	2	4	6	$\dots$	$2n-2$	$2n$
1	1	2	3	$\dots$	$n-1$	n
	1	2	3		$n-1$	n $\quad p$

во која се запишани сите производи pq, добиваме

$$C=(1+2+...+n)+2(1+2+...+n)+...+n(1+2+...+n)-(1^2+2^2+...+n^2)$$
$$=\tfrac{n(n+1)}{2}\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}-\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\tfrac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

Според тоа,

$$S(x,n)=(n-1)nx^2+(n-1)n(n+1)x+\tfrac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

б) Решавајќи ја равенката $S(x,n)=0$ добиваме

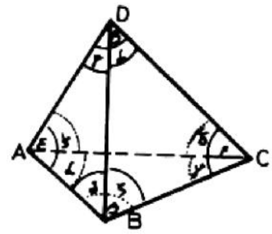
$$x=\frac{-(n+1)\pm\sqrt{\frac{n+1}{3}}}{2}$$

и овој број при целобројни вредности на n ќе биде цел број ако и само ако $n=3k^2-1,\ k\in\mathbb{N}$.

6. За да центарот S на сферата опишана околу тетраедарот се совпадне со центарот S' на сферата впишана во тетраедарот, потребно и доволно е разминувачките рабови на тетраедарот да се еднакви. Докажи!

Решение. Прво да претпоставиме дека центрите на сферите S и S' се совпаѓаат. Тогаш ѕидовите на дадениот тетраедар се еднакво оддалечени од центарот S на опишаната сфера, па затоа пресеците на соодветните рамнини со опишаната сфера се складни кружници. Аглите BAC и BDC се периферни агли во скалдни кружници над тетивата BC (цртеж десно), па затоа се еднакви и нивната вредност да ја означиме со α. На сличен начин добиваме дека

$$\measuredangle CBA = \measuredangle CDA = \beta,$$
$$\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = \gamma,$$
$$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \delta,$$
$$\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = \varepsilon,$$
$$\measuredangle CBD = \measuredangle CAD = \varsigma.$$



Од триаголниците ABC, BCD, CDA, DAB добиваме

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ,\ \alpha+\varepsilon+\varsigma=180^\circ,\quad \beta+\delta+\varsigma=180^\circ,\ \gamma+\delta+\varepsilon=180^\circ.$$

Од првите две равенки на овој систем следува $\beta+\gamma=\varepsilon+\varsigma$, а од другите две следува $\beta+\varsigma=\gamma+\varepsilon$. Од овие две релации добиваме дека $\beta=\varepsilon$ и $\varsigma=\gamma$. Оттука следува дека триаголниците ABC и DCB се складни, па затоа $AB=DC$ и $CA=BD$. Слично се докажува дека $BC=DA$.

Обратно, нека разминувачките рабови на тетраедарот се еднакви. Тоа значи дека ѕидовите на тетраедарот се меѓусебно складни триаголници, па затоа и опишаните кружници околу нив се складни. Според тоа, тие ѕидови се еднакво оддалечени од центарот S на опишаната сфера околу тетраедарот, што значи дека центарот S' на впишаната сфера се совпаѓа со S.