БРОЈНЕ СРЕДИНЕ И ТРАПЕЗ

Ратко Тошић, Нови Сад

За два позитивна броја a и b се дефинише хармонијска, геометријска, аритметичка и квадратна средина редом на следећи начин:

$$H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},\quad G=\sqrt{ab},\quad A=\frac{a+b}{2},\quad K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Хармонијска средина се записује још и у облику $H=\dfrac{2ab}{a+b}$.

Лако се доказује да важе неједнакости

$$H\le G\le A\le K,$$

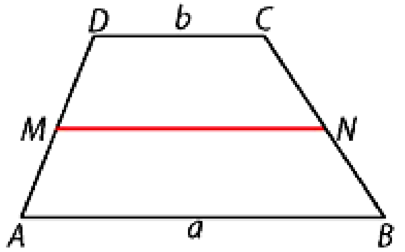
где знак једнакости важи само у случају када је $a=b$; тада је $H=G=A=K$.

У овом чланку даћемо једну геометријску интерпретацију бројних средина и наведених неједнакости које за њих важе.

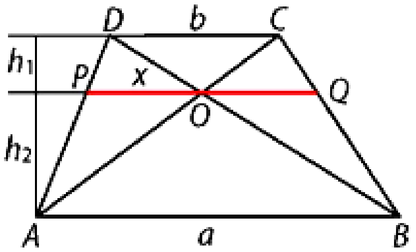
Нека је $ABCD$ трапез са основицама $AB=a$, $CD=b$. Нека је MN средња линија тога трапеза, тј. дуж која спаја средишта M и N кракова AD и BC (слика 1).

У школи се доказује да је $MN=\dfrac{a+b}{2}$. Другим речима, дужина средње линије трапеза једнака је аритметичкој средини дужина његових основица.

Геометријске интерпретације осталих средина природно се појављују код решавања неких задатака у вези са трапезом.



Слика 1



Слика 2

ЗАДАТАК 1. Кроз тачку пресека дијагонала трапеза повучена је права паралелна његовим основицама. Наћи дужину дужи коју на тој правој одсецају краци трапеза.

Решење. Из сличности троуглова APO и ADC (слика 2) добија се неједнакост

$$\frac{x}{b}=\frac{h_2}{h}, \tag{1}$$

где су h и h_2 висине троуглова ADC и APO редом, а $x=PO$.

Аналогно, из сличности троуглова PDO и ADB добија се

$$\frac{x}{a}=\frac{h_1}{h}, \tag{2}$$

где је h_1 висина троугла PDO. Сабирањем (1) и (2) добијамо

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}=1,$$

то јест

$$PO=x=\frac{ab}{a+b}.$$

На исти начин, из сличности троуглова *BOQ* и *BDC*, а такође и троуглова *OCQ* и *ACB* добија се да је

$$OQ=\frac{ab}{a+b},$$

одакле је

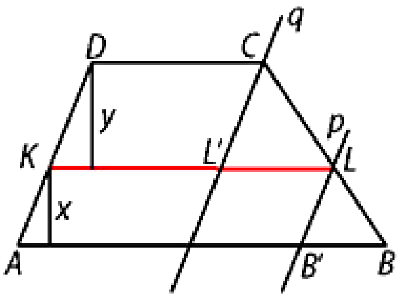
$$PQ=\frac{2ab}{a+b}.$$

Другим речима, краци трапеза одсецају на правој која је повучена кроз пресек дијагонала, паралелно основицама, дуж чија је дужина хармонијска средина дужина основица.

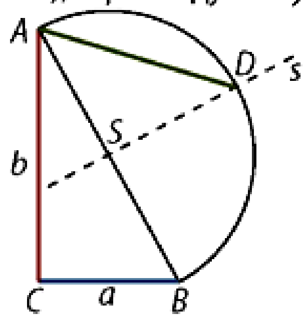
Из решења задатка јасно је како се конструише дуж чија је дужина једнака хармонијској средини дужина две дате дужи. Треба конструисати било који трапез чије су основице једнаке датим дужима и кроз пресек дијагонала тога трапеза повући праву паралелну основицама. Одсечак те праве између кракова је тражена дуж.

ЗАДАТАК 2. Конструисати праву паралелну основицама датог трапеза која тај трапез дели на два дела једнаких површина.

Решење. Нека је l тражена права и нека она сече краке AD и BC у тачкама K i L (слика 3), $KL = c$. Означимо са x и y редом висине трапеза $ABLK$ и $KLCD$. Јасно је да је $x + y = h$. Кроз тачке L и C повуцимо редом праве p и q паралелне са AD. Нека p сече основицу AB у тачки B' ($AB = a$ је дужа основица трапеза), а q сече дуж KL у тачки L'.



Слика 3



Слика 4

Из сличности троуглова $B'BL$ и $L'LC$ следи да је

$$\frac{x}{a-c}=\frac{y}{c-b},$$

то јест

$$(c-b)x=(a-c)y. \tag{3}$$

С друге стране из једнакости површина трапеза $ABLK$ и $KLCD$ следи

$$(a+c)x=(c+b)y. \tag{4}$$

Из (3) и (4) добијамо да је $c^2 - b^2 = a^2 - c^2$, тј.

$$c = KL = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Другим речима, дужина дужи KL једнака је квадратној средини дужина основица трапеза.

Сада тражену конструкцију праве l можемо извести у неколико корака:

(1) Конструишемо дуж дужине $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

(2) На основици AB трапеза одредимо тачку B' такву да је $AB' = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (наношењем дужи конструисане у тачки (1)).

(3) Кроз тачку B' конструишемо праву p паралелну краку AD. Нека је L пресек те праве са краком BC.

(4) Сада тражену праву конструишемо као праву кроз тачку L паралелну основици AB.

Корак (1) своди се на решавање следећег задатка:

ЗАДАТАК 3. Дате су дужи $AB = a$ и $CD = b$. Конструисати дуж дужине

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}.$$

Решење. Приметимо следеће: $c = \sqrt{a^2+b^2}$ је дужина хипотенузе правоуглог троугла са катетама дужине a и b. $\frac{x}{\sqrt{2}}$ је дужина странице квадрата са дијагоналом дужине x, односно катета једнакокрако-правоуглог троугла са хипотенузом дужине x.

Сада конструкцију изводимо на следећи начин:

(1) Конструишемо правоугли троугао ABC са катетама дужине a и b (слика 4). Дужина хипотенузе тог троугла је $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

(2) Конструишемо симетралу s хипотенузе AB. Нека је S пресек те симетрале са хипотенузом, тј. средиште дужи AB.

(3) Конструишемо кружницу k са центром S полупречника SA. Нека је D пресек те кружнице са правом s.

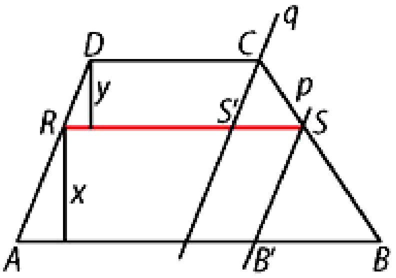
Дуж AD је тражена дуж дужине

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}.$$

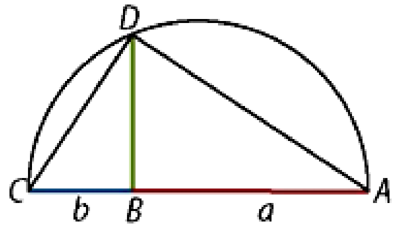
ЗАДАТАК 4. Нека је $ABCD$ трапез са основицама $AB = a$ и $CD = b$. Конструисати праву паралелну основицама трапеза која његове краке AD и BC сече редом у тачкама R и S тако да се површине трапеза $ABSR$ и $RSCD$ односе као $a : b$.

Решење. Нека је $l = RS$ тражена права (слика 5) и нека су x и y редом висине трапеза $ABSR$ и $RSCD$.

Кроз тачке S и C повуцимо редом праве p и q паралелне са AD. Нека р сече основицу AB у тачки B' ($AB = a$ је дужа основица трапеза), а q сече дуж RS у тачки S'.



Слика 5



Слика 6

Из сличности троуглова $B'BS$ и $S'SC$ следи да је

$$\frac{x}{a-c}=\frac{y}{c-b},$$

то јест

$$(c-b)x=(a-c)y. \tag{5}$$

С друге стране из услова за однос површина

$$\frac{(a+c)x}{2a}=\frac{(c+b)y}{2b}$$

добијамо да је

$$(a+c)bx=(c+b)ay. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следи да је $(c^2 - b^2)axy = (a^2 - c^2)bxy$, то јест $c=\sqrt{ab}$. Другим речима, дужина дужи RS једнака је геометријској средини дужина основица трапеза.

Сада тражену конструкцију праве l можемо извести у неколико корака:

(1) Конструишемо дуж дужине $\sqrt{ab}$.

(2) На основици AB трапеза одредимо тачку B' такву да је $AB'=\sqrt{ab}$ (наношењем дужи конструисане у тачки (1)).

(3) Кроз тачку B' конструишемо праву р паралелну краку AD. Нека је S пресек те праве са краком BC.

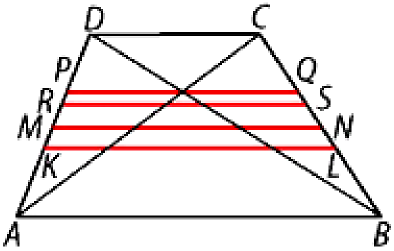
(4) Сада тражену праву конструишемо као праву кроз тачку S паралелну основици AB.

Корак (1) је позната конструкција дужи која је геометријска средина датих дужи a и b. Један од начина је следећи: Конструише се кружница над пречником AC дужине $a + b$, а затим се из тачке B која тај пречник дели на делове дужине a и b подигне нормала до пресека D са полукружницом (слика 6). Дуж BD је тражена дуж. Доказ лако следи из сличности правоуглих троуглова ABD и DBC.

Напомена. Трапези $ABSR$ и $RSCD$ о којима се говори у задатку 4 су слични (задатак 6).

На крају сумирајмо резултате који се односе на бројне средине два броја представљена дужинама основица трапеза.

Представимо дужи MN, PQ, KL, RS о којима се говори у претходним задацима на једној слици (слика 7). Све те дужи су паралелне основицама трапеза $ABCD$ и при томе важи:



Слика 7

- PQ садржи тачку пресека дијагонала трапеза.
- RS дели трапез на два слична трапеза.
- MN је средња линија трапеза.
- KL дели трапез на два дела једнаких површина.

На основу самих наведених геометријских чињеница може се закључити да важи

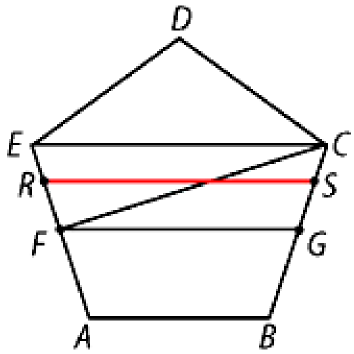
$$PQ \leq RS \leq MN \leq KL,$$

и да једнакост свуда важи само када је дати трапез паралелограм, тј. када је $AB = CD$.

Дајемо и решење једног лепог задатка користећи напред изложени материјал.

ЗАДАТАК 5. Дат је правилан петоугао $ABCDE$. Конструисати праву паралелну страници AB која тај петоугао дели на два дела једнаких површина.

Решење. Нека су F и G редом средишта страница AE и BC петоугла (слика 8). Дуж CF дели петоугао на два дела једнаких површина (два подударна петоугла). Четвороугао $CEFG$ је трапез са основицама CE и GF. Тај трапез је дијагоналом CF подељен на два дела (троугла) чије се површине односе као $CE : GF$ (троуглови CEF и GFC имају једнаке висине одговарајуће страницама CE и FG). Нека су R и S редом тачке на крацима EF и CG трапеза $CEFG$ такве да је $RS \parallel FG$. Ако се површине трапеза $CERS$ и $SRFG$ односе као $CE : GF$, онда дуж RS такође дели петоугао $ABCDE$ на два дела једнаких површина.



Слика 8

Дакле, тражена конструкција се састоји из следећих корака:

(1) Одређивање средишта F странице AE.

(2) Конструкција праве кроз тачку F паралелне са AB и одређивање тачке пресека G те праве са страницом BC.

(3) Конструкција праве паралелне са FG која трапез $CEFG$ дели на два дела чије се површине односе као $CE : GF$ (задатак 4).

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛНИ РАД

6. Доказати да су трапези $ABSR$ и $RSCD$ о којима се говори у задатку 4 – слични.

   Упутство: Како је $c=\sqrt{ab}$, то је $c^2=ab$, то јест $\frac{c}{a}=\frac{b}{c}$, што је довољно за сличност трапеза (уз једнакост углова).

7. (Задатак из књиге „Венац астрономске науке" индијског математичара Бхаскаре (12. век)) Два бамбусова штапа забодена су вертикално у земљу на равном тлу. Врх сваког штапа спојен је канапом са подножјем другог. Одреди растојање од тла тачке у којој се укрштају канапи. (Директна примена задатка 1.)

8. У правоугли троугао са катетама a и b уписан је квадрат тако да му две странице леже на катетама, а једно теме на хипотенузи тога троугла. Одреди дужину странице тога квадрата и на основу тога опиши још један начин за конструкцију дужи чија је дужина једнака хармонијској средини дужина две дате дужи.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија