МЕТОДА ПОВРШИНА

Милан Шарић, Бели Манастир

За површину троугла постоји више формула. Ако се површина троугла изрази на два различита начина, тада се везе међу постојећим параметрима могу згодно искористити. Управо у томе је и идеја примене методе површина у неким тригонометријским задацима.

Пример 1 Решити једначину

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4\ ,$$

где је $0^\circ < x < 90^\circ$.

Решење. Дата једначина се може трансформисати у облик

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{12})^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos x}\quad &+ \\ \sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos(90^\circ-x)}\quad &=\quad 4.\end{aligned} \tag{1}$$

Уочимо да је на основу косинусне теореме први сабирак једнак страници троугла чије су друге две странице $\sqrt{12}$ и $\sqrt{3}$, а угао међу њима x. Аналогно, други сабирак једнак је страници троугла чије су друге две странице једнаке $\sqrt{3}$ и 2 и угао међу њима $90^\circ - x$ (јер је $\sin x = \cos(90^\circ - x)$).

Нека је ABC правоугли троугао са катетама $|AC| = \sqrt{12}$ и $|BC| = 2$. Уочимо на хипотенузи AB тачку D, такву да је $|CD| = \sqrt{3}$ (сл.1). Тада је, према наведеним ознакама, $\angle ACD = x$ и $\angle BCD = 90^\circ - x$. Даље, дуж AD једнака је првом, а дуж BD другом сабирку на левој страни (1). Отуда је $|AB| = 4$ (што следи и из Питагорине теореме). Дакле,

$$|AD| + |BD| = 4.$$

Помножимо ли ову једнакост са $\frac{h_c}{2}$, где је h_c висина из темена C, добијамо

$$\frac{|AD|\cdot h_c}{2}+\frac{|BD|\cdot h_c}{2}=\frac{4\,h_c}{2},$$

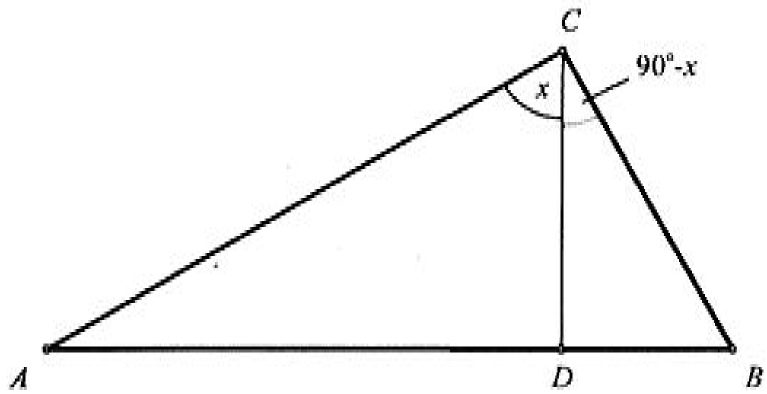
односно, имајући у виду површине троуглова,

$$P(ADC)+P(BDC)=P(ABC). \tag{2}$$

($P(XYZ)$ означава површину троугла XYZ.)

С обзиром да је $P(ADC) = \frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x}{2}$, $P(BDC) = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(90^\circ-x)}{2}$ и $P(ABC) = \frac{2\cdot\sqrt{12}}{2}$ из (2) добијамо

$$6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x = 4\sqrt{3},$$



Слика 1.

односно

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x &= 1\\ \cos 30^\circ \sin x+\sin 30^\circ \, cos x &= 1\\ \sin(x+30^\circ) &= 1.\end{aligned}$$

Како је x оштар угао решење ове једначине је $x = 60^\circ$, што је уједно и решење једначине (1).

Пример 2 *Ако су α, β и γ углови троугла, тада је*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

Доказати.

Решење. Нека $k(O;r)$ кружница уписана у троугао ABC; O – центар, r – полупречник. Обележимо са A_1, B_1, C_1 тачке додира кружнице k са страницама BC, CA, AB, редом (сл. 2).

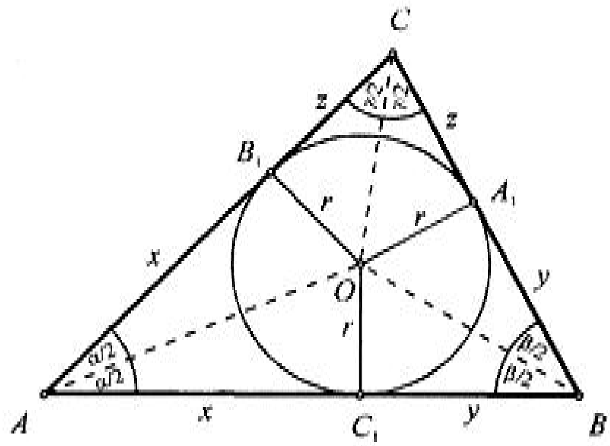
Уведимо још следеће ознаке:

$$|AC_1|=|AB_1|=x,\quad |BC_1|=|BA_1|=y,\quad |CA_1|=|CB_1|=z,$$

$$|AB|=c,\quad |BC|=a,\quad |CA|=b,\quad s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Тада је $x=s-a$, $y=s-b$ и $z=s-c$. Из правоуглих троуглова AOC_1, BOA_1 и COB_1 следи

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-b},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}. \qquad (1)$$



Слика 2.

Ако површину троугла ABC изразимо преко полупречника уписане кружнице и полуобима, односно Херонове формуле добијамо

$$P(ABC) = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

одакле је

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}. \tag{2}$$

Сада из (1) и (2) следи

$$\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2} =$$

$$\tfrac{r^2}{(s-a)(s-b)} + \tfrac{r^2}{(s-b)(s-c)} + \tfrac{r^2}{(s-c)(s-a)} =$$

$$\tfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)} + \tfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-b)(s-c)} + \tfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-c)(s-a)} =$$

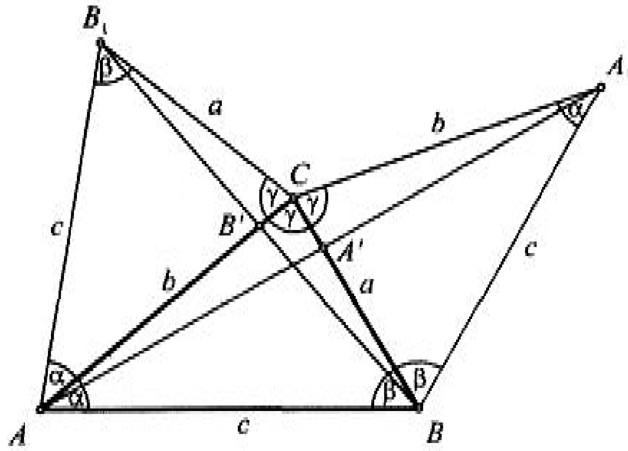
$$\tfrac{s-c}{s} + \tfrac{s-a}{s} + \tfrac{s-b}{s} = \tfrac{3s-2s}{s} = 1.$$

Пример 3 *Ако су α, β, γ углови оштроуглог троугла, тада из $\alpha < \beta < \gamma$ следи*

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

Доказати.

Решење. *Нека је ABC оштроугли троугао и нека је A_1 – тачка симетрична темену A у односу на праву BC и B_1 – тачка симетрична темену B у односу на праву AC. Обележимо са A' и B' пресеке дужи AA_1 и BC, односно BB_1 и CA (сл. 3).*



Слика 3.

Из услова $\alpha < \beta < \gamma$ следи

$$a < b < c, \tag{1}$$

где је $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Даље из подударности троуглова ACA' и A_1CA', односно BCB' и B_1CB' следи

$$\angle ACA_1 = \angle BCB_1 = 2\gamma. \tag{2}$$

Како је, услед симетрије, $|CB_1| = a$ и $|CA_1| = b$, из (1) и (2) добијамо

$$\begin{aligned} P(BCB_1) &= \tfrac{1}{2}\, a^2 \sin 2\gamma \\ &< \tfrac{1}{2}\, b^2 \sin 2\gamma \\ &= P(ACA_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Како је $\triangle AB'B_1 \cong \triangle AB'B$ и $\triangle BA'A_1 \cong \triangle BA'A$ то је због (3)

$$\begin{aligned} \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2} &= P(BAB_1) \\ &= 2\,P(ABC) - P(BCB_1) \\ &> 2\,P(ABC) - P(ACA_1) \\ &= P(ABA_1) \\ &= \frac{c^2 \sin 2\beta}{2}. \end{aligned}$$

Отуда је $\sin 2\alpha > \sin 2\beta$. Слично доказујемо неједнакост $\sin 2\beta > \sin 2\gamma$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1995/96 година