**Илија Јанев,**
**Скопје**

## ПАК БРОЕЊЕ

Во претходниот број од нашето списание малата Кети, од својот постар брат Игор, научи и друг вид броење, односно определување на вкупниот број ракувања меѓу $n$ лица, при што секое лице се ракува со секое друго само еднаш. Да го проследиме нивниот денешен разговор.

- Кети, за лектира имаш десет книги, - започна Игор. - Што мислиш, колку време ќе ти треба да ги разместиш на полицата?

- Една минута, - одговори Кети.

- Не брзај, дослушај докрај. Да ги означиме тие книги, заради краткост, со $A, B, C, \ldots$ и да продолжиме со еден друг вид броење.

- Нешто слично како ракувањето? - се заинтересира Кети.

- Да, но не е идентично. Сега ќе броиме на колку начини можеш да ги подредиш, една до друга, на својата полица.

- Па еве вака: Прво ја ставаш книгата $A$, па донеа книгата $B$, па книгата $C$, ... На еден начин, - избрза Кети.

- Да, но ако сега почнеш да ги разместуваш поинаку: прво книгата $A$, па книгата $C$, па $B$ ...

- Ах, тоа е многу.

- Да, колку е многу "многу"?

- Не знам, - си призна искрено Кети.

- Да го примениме и сега методот на постапност. Да почнеме првин со ...

- Со подредување на две книги, - побрза да каже Кети.

- А зошто не и со една?

- Зошто тогаш немаме подредување, - рече Кети.

- Да, немаме "подредување", но имаме една можност. Значи, една книга една можност.

- Значи за две книги би имале две можности, - брзо заклучи Кети.

- Да, тоа се овие две подредувања, - рече Игор, - подавајќи и лист на кој беа нацртани две подредувања на книгите $A$ и $B$.

- Кога би имале три книги, тогаш ..., - размислуваше Кети.

- Тогаш би имале шест подредувања, - и помогна Игор.

- А како ги определи? - праша Кети.

- Ќе ти помогнам, - рече Игор. На прво место може да биде која било од книгите $A, B$ или $C$. За почеток, нека е тоа книгата $A$ и нека таа “мирува”, а да ги разместиме преостанатите две книги.

- А тоа можеме да го сториме на два начини ...

- Точно, потврди Игор. -Тоа го запишуваме вака $A(BC)$ или $A(CB)$.

- Ако ја ставиме на прво место книгата $B$, би имале можности $B(AC)$ и $B(CA)$, а кога е на прво место $C$, би имале $C(AB)$ и $C(BA)$, - побрза да каже Кети.

- Одлично заклучуваш, - ја пофали Игор. - Ваквите подредувања во математиката се викаат пермутации. Тоа е латински збор и значи промена, замена, разместување. Воопшто ако ни се дадени извесен број предмети (книги, букви, броеви и слично), тогаш секое подредување на тие предмети во една низа се вика пермутација на тие предмети. Определувањето, пак, на бројот на сите можни подредувања, всушност значи определување на бројот на сите пермутации.

- Значи од три предмети имаме 6 пермутации, - заклучи Кети.

- Наместо предмети математички ќе велиме елементи. Ако бројот на пермутации од три елементи го означиме со $P_3$ ќе имаме $P_3 = 6$.

- Но, тогаш $P_1 = 1, P_2 = 2$, забележа Кети.

- Да, -повтори Игор. -Да го определиме сега бројот на сите пермутации од четири елементи, односно $P_4$. Ќе се вратиме на нашите книги $A, B, C$ и $D$. За првото место “кандидат” е секоја од четирте букви - значи четири можни избори, а преостанатите три книги ги разместуваме (пермутираме) ...

- На шест начини, - побрза Кети.

- Или вкупно ..., - ја праша Игор.

- Вкупно ... вкупно 24 пермутации.

- Да, бидејќи $4 \cdot 6 = 24$, или подобро $4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

- Па тоа е производот на првите четир природни броеви, - се зачуди Кети.

- Да, секој добар математичар би ја забележал оваа законитост.

- Бато, значи ли тоа дека пет книги можеме да ги разместиме на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начини? - праша Кети, а во себе се радуваше, бидејќи очекуваше потврден одговор.

- Точно така. Затоа можеме да запишеме $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начини и $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ начини. Притоа, производот $2 \cdot 1$ или што е исто

$1 \cdot 2$ се вика два факториел и се означува со $2!$, односно $2! = 1 \cdot 2$; производот $1 \cdot 2 \cdot 3$ се вика три факториел, а се запишува со $3!$, односно $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

- Производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ се вика четири факториел и се означува со $4!$, производот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ се вика пет факториел и се означува со $5!$, односно $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

- Добро, добро гледам дека ова го разбра, -рече Игор. -Сигурно насетуваш дека во општ случај, кога имаме $n$ елементи ќе важи формулата

$$P_n = n!.$$

Ја читаме вака: Пе ен е еднакво на ен факториел. Со неа можеме да го пресметаме бројот на пермутациите од $n$ елементи за секој природен број $n$.

- Сега лесно ќе пресметаме на колку начини можам да ги подредам моите 10 книги на полицата, - се израздува Кети. - Доволно е да пресметам колку изнесува $10!$.

- Верувам, - се согласи Игор, - но уште побрзо и полесно направи го тоа со дигитрон.

- Како? - се интересираше и понатаму Кети.

- Доволно е да го запишеш бројот 10, а потоа да го притиснеш копчето $x!$.

- На мојот дигитрон нема такво копче, - се пожали Кети.

- Тогаш ќе ги помножиш сите броеви од 1 до 10. Притоа искористи ги својствата на операцијата множење, - ја поучи Игор.

- Но, како? - размислуваше гласно Кети.

- Групирај ги множителите вака

$$(9 \cdot 8) \cdot (6 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 2) \cdot 10.$$

- И што со тоа?

- Ќе добиеш $72 \cdot 24 \cdot 21 \cdot 100$, а тоа значи ...

- Да измножам само три двоцифрени броеви и да допишам две нули, го дополни Кети.

- А тие двоцифрени броеви лесно се множат, бидејќи ...

- Добив 36288, - го прекина Кети.

- Ги заборави двете нули, - ја исправи Игор. - Но да провериме со мојот дигитрон.

- Можам и јас, - се пофали Кети. - Прво го пишувам бројот 10, а потоа го притискам копчето $x!$ и добивам 3628800.

- Значи точно си пресметала. Тоа го запишуваме вака:

$$10! = 3628800.$$

- Бато, тоа е многу голем број, - се зачуди Кети.

- Да. За да сфатиш колку е голем овој број, ќе направиме едно вакво пресметување. Ако секоја книга ја разместиме за една секунда, тогаш за едно подредување ти се потребни 10 секунди., а за сите подредувања ти се потребни 36288000 секунди или 10080 часови. Тоа, пак се 1260 работни денови, ако работиш по 8 часа дневно или 420 дена ако работиш по 24 часа дневно.

- Па тоа е повеќе од една година, - се зачуди Кети.

- Да, во првиот случај тоа се повеќе од 4 години, под претпоставка да работиш 8 часа дневно, освен во недела.

- Јас мислам дека би можела и пократко, - неубедливо рече Кети.

- Можеш најкратко за 42 дена, работејќи по 24 часа дневно, ако за секоја пермутација употребиш 1 секунда, а не 10. Во тој случј треба добро да внимаваш, при секое разместување на само една книга да добиеш нова пермутација, а не некоја од претходните. Но, тогаш нема јадење, нема спиење, учење ...

- Гледање телевизија, играње, - дополни Кети.

- Е, ако сето тоа го сакаш требада работиш 8 часа дневно, а за тоа ти се потребни 126 дена. Сметајќи ги неработни саботите, неделите и некои празници, тоа е приближно половина година.

- Толку многу? А разместуваме само 10 книги. Да не поверува човек, - си призна Кети.

- Треба да веруваш. На математиката можеш да и веруваш и треба да и веруваш.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ