Републички натпревар 2009

I година

1. Докажи дека производот A е природен број делив со 2009.

Решение. Нека $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2008}$. Имаме

$$\begin{aligned}A&=(1+\tfrac{1}{2008})+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2007})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2006})+\dots+(\tfrac{1}{1004}+\tfrac{1}{1005})\\&=\tfrac{2009}{1\cdot 2008}+\tfrac{2009}{2\cdot 2007}+\dots+\tfrac{2009}{1004\cdot 1005}\\&=2009\cdot(\tfrac{1}{1\cdot 2008}+\tfrac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\tfrac{1}{1004\cdot 1005})\end{aligned}$$

Но, производот $2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2008$ е делив со секој од именителите во изразот

$$\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{1}{1004\cdot 1005}$$

па затоа

$$(\frac{1}{1\cdot 2008}+\frac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\frac{1}{1004\cdot 1005})\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2008=M$$

е природен број. Според тоа,

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\tfrac{1}{2008})\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2008&=2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2008A\\&=2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2008\cdot 2009(\tfrac{1}{1\cdot 2008}+\tfrac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\tfrac{1}{1004\cdot 1005})\\&=2009\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2008(\tfrac{1}{1\cdot 2008}+\tfrac{1}{2\cdot 2007}+\dots+\tfrac{1}{1004\cdot 1005})\\&=2009M\end{aligned}$$

што значи дека A е природен број делив со 2009.

2. Докажи дека равенката $x^2+y^2+z^2+t^2=2^{2009}$, каде што $0\le x\le y\le z\le t$, има точно едно решение во множеството на цели броеви.

Решение. Очигледно едно решение на дадената равенка е подредената четворка $(0,0,2^{1004},2^{1004})$. Ќе докажеме дека тоа е и единственото решение на равенката.

Нека (x,y,z,t) е решение на равенката. Бидејќи квадратите на непарните природни броеви даваат остаток 1 при делење со 8, следува дека x,y,z и t се парни броеви (сите останати случаи во однос на парноста на x,y,z,t може да се разгледаат поединечно, од каде ќе се добие противречност со парноста на бројот од левата и десната страна на равенката). Затоа,

$$x=2x_1, y=2y_1, z=2z_1 \text{ и } t=2t_1,$$

каде што $0\le x_1\le y_1\le z_1\le t_1$. Ако замениме во почетната равенка и скратиме со 4 ја добиваме равенката

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2=2^{2007}.$$

Добиената равенка е од истиот вид како и почетната само степенот на десната страна е намален за два. Од истите причини како и претходно заклучуваме дека

$$x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2 \text{ и } t_1 = 2t_2,$$

каде што $0 \le x_2 \le y_2 \le z_2 \le t_2$ и ако замениме во претходната равенка добиваме

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + t_2^2 = 2^{2005}.$$

Истата постапка ќе ја повториме 1004 пати, и добиваме дека

$x = 2^{1004}a, y = 2^{1004}b, z = 2^{1004}c$ и $t = 2^{1004}d$,

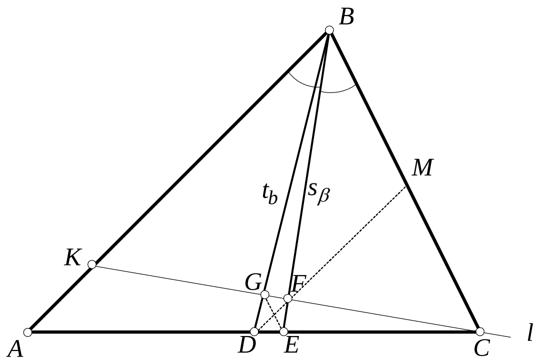
каде што $0 \le a \le b \le c \le d$ се цели броеви и важи

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2.$$

Единственото решение на последната равенка при дадените услови е подредената четворка $(0,0,1,1)$. Од тука добиваме дека $(0,0,2^{1004},2^{1004})$ е единственото решение на почетната равенка.

3. Даден е триаголникот ABC, $(BC < AB)$. Низ точката C е повлечена права l, нормална на симетралата BE на аголот $\measuredangle B$. Правата l ја сече BE во точка F, а тежишната линија BD во точка G. Докажи дека отсечката DF ја преполовува отсечката EG.

Решение. Нека $CF \cap AB = \{K\}$ и $DF \cap BC = \{M\}$. Бидејќи $BF \perp KC$ и BF е симетрала на $\measuredangle KBC$ следува дека $\triangle KBC$ е рамнокрак, т.е. $\overline{BK} = \overline{BC}$ и уште F е средина на KC. Според тоа, DF е средна линија за $\triangle AKC$, односно $DF \parallel AK$, од каде јасно M е средина на BC.



Ќе покажеме дека $GE \parallel BC$. Доволно е да покажеме дека $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$.

Од $DF \parallel AK$ и $\overline{DF} = \frac{\overline{AK}}{2}$, и од сличноста на триаголниците BKG и GDF имаме

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BK}}{\frac{1}{2}\overline{AK}} = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}}. \qquad (1)$$

Понатаму, од сличноста на ΔABE и ΔDEF имаме

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} &= \frac{\overline{CD}-\overline{DE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}-\overline{DE}}{\overline{DE}} - 1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} - 2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} - 2 \\ &= \frac{\overline{AK}+\overline{BK}}{\frac{\overline{AK}}{2}} - 2 = 2 + 2\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}} - 2 = \frac{2\overline{BK}}{\overline{AK}}\end{aligned} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $\frac{\overline{BG}}{\overline{GD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{ED}}$, па следува $GE \parallel BC$, и бидејќи M е средина на BC, следува DF ја преполовува GE.

4. а) На табла 5x5 се поставени 21 жетон со белата страна нагоре така да секој жетон лежи врз посебно 1x1 квадратче (секој жетон е двобоен, има една бела и една црна страна). Во секој потег, Марта зема од таблата еден “бел” жетон, го превртува и го враќа врз некое слободно 1x1 квадратче. Нејзина цел е да ги преврти сите 21 жетони, а да притоа во ниту еден момент на таблата не се поставени “бел” и “црн” жетон врз соседни (со заедничка страна) 1x1 квадратчиња. Покажи дека независно од почетниот распоред на жетоните, Марта не може да ја реализира целта.

б) Дали доколку наместо 21 жетон, врз таблата се поставени 20 жетони со белата страна нагоре, постои почетен распоред за кој Марта може да ја реализира поставената цел?

Решение. а) Од принципот на Дирихле, во секој момент кога на таблата се поставени 21 жетон, постои редица целосно исполнета со жетони и постои колона целосно исполнета со жетони. Да претпоставиме дека Марта успеала да ја реализира поставената цел. Тогаш на почетокот, на таблата има “бел” крст жетони, а на крајот, на таблата има “црн” крст жетони. Притоа, во секој момент кога на таблата се сите 21 жетони, од условот за соседство и обоеност на соседните жетони, секој крст жетони е монохроматски (еднобоен). Но тоа значи дека мора да постои момент (потег) кога со превртување на само еден жетон, од таблата ќе исчезне “бел” крст, а ќе се појави “црн” крст. Ова не е можно, бидејќи секои два крста се преклопуваат на барем две полиња.

б) Постои поволен почетен распоред. Еден таков е да најдесната колона се остави празна. Ако квадратњата ги означиме со парови броеви (x, y) каде x е редицата а y колоната во кое тоа се наоѓа, празна колона се квадратчињата (1,5),...,(5,5), т.е. на нив нема жетони. Марта треба да започне да ги превртува жетоните на следниов начин: го подига жетонот од позиција (1,4), го превртува и го враќа врз позиција (1,5); го подига жетонот од позиција (2,4), го превртува и го враќа врз позиција (2,5); итн. се додека не ја пополни 5-тата, а испразни 4-тата колона. Потоа на истиот начин започнува да ја празни 3-тата, да ја пополнува 4-тата колона; итн. се додека не ја испразни првата, а ја пополни втората колона.

II година

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21.$$

Решение. Имаме

$$x^2-x+1=(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\geq\tfrac{3}{4}, \tag{1}$$

$$4y^2+6y+4=4(y+\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{7}{4}\geq\tfrac{7}{4} \quad (2)$$

и

$$4z^2-12z+25=4(z-\tfrac{3}{2})^2+16\geq 16. \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува дека

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)\geq 16\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{7}{4}=21 \quad (4).$$

Равенство е исполнето аком и само ако во (1),(2) и (3) се исполнети равенства. Но, условот за равенство е зададената равенка

$$(x^2-x+1)(4y^2+6y+4)(4z^2-12z+25)=21$$

па според тоа решение на равенката е $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{4}$, $z=\frac{3}{2}$.

2. Кој од следниве изрази е поголем:

$$A=\frac{1+a+a^2+...+a^{n-1}}{1+a+a^2+...+a^n} \text{ или } B=\frac{1+b+b^2+...+b^{n-1}}{1+b+b^2+...+b^n}, \text{ ако } a>b>0.$$

Решение. Изразот $\frac{1}{A}$ можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{A}=\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}}=1+\frac{a^n}{1+a+a^2+...+a^{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+...+\frac{1}{a}}.$$

Слично и за B, изразот $\frac{1}{B}$ можеме да го запишеме во облик:

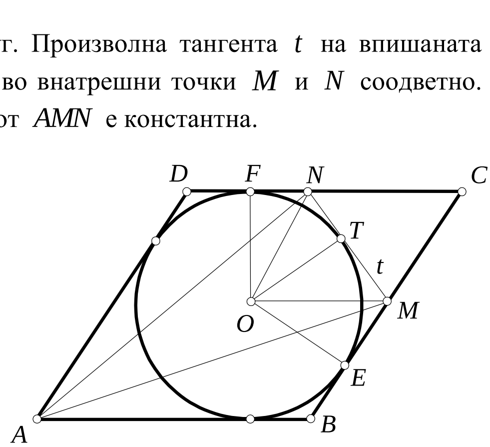
$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+...+\frac{1}{b}}.$$

Но, $a>b>0$, па затоа $0<\frac{1}{a^k}<\frac{1}{b^k}$, за $k=1,2,...,n$, па затоа $0<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{b^k}$, од каде што следува $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$, односно $B>A$.

3. Во ромбот $ABCD$ е вписан круг. Произволна тангента t на вписаната кружница ги сече страните BC и CD во внатрешни точки M и N соодветно. Докажи дека плоштината на триаголникот AMN е константна.

Решение. Нека O е центарот на кругот и нека кругот ги допира BC и CD во E и F соодветно. Нека T е точката во која тангентата MN го допира кругот. Бидејќи $\overline{NF}=\overline{NT}$ и $\measuredangle OFN=\measuredangle OTN$ триаголниците ONF и ONT се складни. Па

$$P_{\triangle ONF}=P_{\triangle ONT}.$$



Сега

$$P_{\triangle ANF} = 2P_{\triangle ONF},$$

бидејќи имаат иста основа NF но висината на $\triangle ANF$ кон NF е дијаметарот на кругот, а висината на $\triangle ONF$ кон NF е OF, радиус на кругот. Според тоа $P_{\triangle ANF} = P_{OTNF}$ и аналогно $P_{\triangle AME} = P_{OTME}$.

Сега

$$P_{\triangle AMN} = P_{AEMNF} - P_{\triangle AEM} - P_{\triangle AFN} = P_{AEMNF} - P_{OTME} - P_{OTNF} = P_{AEOF}.$$

Значи $P_{\triangle AMN}$ не зависи од MN.

4. Дали постојат реални броеви a,b,c,d такви што условите:

а) равенката $ax^2+bdx+c=0$ има реални различни корени x_1,x_2,

б) равенката $bx^2+cdx+a=0$ има реални различни корени x_2,x_3,

в) равенката $cx^2+adx+b=0$ има реални различни корени x_3,x_1, да важат истовремено.

Решение. Нека претпоставиме дека такви броеви постојат. Тогаш равенките под а), б) и в) имаат по две различни решенија, секоја посебно, па според тоа $a\neq 0, b\neq 0$ и $c\neq 0$. Од Виетовите формули имаме $x_1x_2=\frac{c}{a}$, $x_2x_3=\frac{a}{b}$ и $x_3x_1=\frac{b}{c}$. Ако последните три равенства ги помножиме, добиваме $x_1^2x_2^2x_3^2=1$. Според тоа $x_1x_2x_3=t$ каде $t=\pm 1$. Од последното равенство и Виетовите врски имаме $x_1=t\frac{b}{a}$, $x_2=t\frac{c}{b}$ и $x_3=t\frac{a}{c}$. Сега, ако x_1 го замениме во $ax^2+bdx+c=0$, x_2 го замениме во $bx^2+cdx+a=0$ и x_3 го замениме во $cx^2+adx+b=0$ ги добиваме равенствата: $b^2(1+dt)=-ac$, $c^2(1+dt)=-ab$ и $a^2(1+dt)=-bc$. Но, бидејќи $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$, добиваме дека $1+dt\neq 0$. Па ако ги поделиме последните три равенства попарно, и добиените равенства ги упростиме, добиваме $a^3=b^3=c^3$. Бидејќи a,b,c се реални броеви, имаме $a=b=c$. Сега е јасно дека не е исполнет условот $x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_1$. Значи, такви броеви a,b,c и d не постојат.

III година

1. Докажи дека равенката $x^n-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-...-a_{n-1}x-a_n=0$, каде што $a_k\geq 0$, $1\leq k\leq n$, нема две различни позитивни решенија.

Решение. Равенката за $x\neq 0$ е еквивалентна со равенката $1=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}$.

Ќе воведеме ознака $f(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}$ за $x\in(0,+\infty)$. Не е тешко да се види дека за $0<x_1<x_2$, $f(x_1)>f(x_2)$. Според тоа не може да постојат две различни вредности за x за кои $f(x)=1$. Значи, равенката $1=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}$ нема две различни позитивни решенија. Според тоа, и почетната равенка нема две позитивни различни решенија.

2. Во рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}=1$. За која вредност на $\gamma=\measuredangle ACB$, изразот $g=\frac{\overline{AB}^2+2}{P_{\vartriangle ABC}}$ достигнува најмала вредност.

Решение. Од косинусната теорема имаме $\overline{AB}^2=2-2\cos\gamma$, а за плоштината на триаголникот важи

$$P_{\vartriangle ABC}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\gamma=\tfrac{\sin\gamma}{2}.$$

Тогаш добиваме

$$g(\gamma)=\tfrac{2(4-2\cos\gamma)}{\sin\gamma}=\tfrac{4(2-\cos\gamma)}{\sin\gamma}.$$

Ќе воведеме смена $x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ пр што важи $\sin\gamma=\frac{2x}{1+x^2}$, $\cos\gamma=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ и добиваме $g=g(x)=\frac{2(1+3x^2)}{x}$. Имајќи предвид дека $\gamma\in(0,\pi)$, односно $\frac{\gamma}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$, јасно е дека $x>0$ и притоа важи $g>0$.

Ќе ја одредиме најмалата вредност која ја достигнува функцијата $g(x)$, $x\in(0,\infty)$. Нека $g_{\min}=y$. Ќе определиме за која вредност на x истата се достигнува. Значи ја решаваме равенката $y=g(x)=\frac{2(1+3x^2)}{x}$, односно равенката $6x^2-yx+2=0$. Последната равенка треба да има реални корени, па потребно е дискриминантата да е ненегативна, т.е. $D\geq 0$. Тогаш

$$y^2-48\geq 0 \Leftrightarrow y\leq -4\sqrt{3} \quad \text{или} \quad y\geq 4\sqrt{3}.$$

Бидејќи $g>0$ го разгледуваме само случајот $y\geq 4\sqrt{3}$. Значи, најмалата вредност која функцијата може да ја достигне е $y=4\sqrt{3}$ и истата се достигнува кога $6x^2-4x\sqrt{3}+2=0$. Од последната равенка наоѓаме $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и притоа соодветниот агол на триаголникот е $\gamma=\frac{\pi}{3}$. Бидејќи триаголникот е рамнокрак, добиваме дека тој е и рамностран.

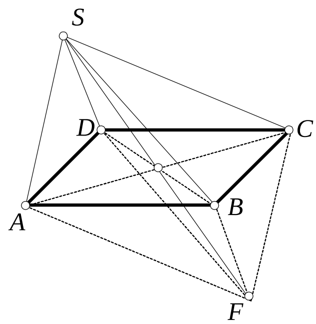
3. Даден е правоаголник $ABCD$ и точка S (точката S не мора да лежи во рамнината на правоаголникот). Дали растојанијата од точката S до темињата на правоаголникот може во некој редослед да бидат еднакви на 1, 3, 5 и 7.

Решение. Нека за правоаголникот $ABCD$ точката S е таква да растојанијата на точката до темињата на правоаголникот по некој редослед се еднакви на 1, 3, 5,

7. Ќе ја пресликаме точката S, во однос на централна симетрија со центар пресекот на дијагоналите на правоаголникот E, во точка F. Тогаш четириаголниците $AFCS$ и $BFDS$ имаат дијагонали кои се преполовуваат, па оттука истите се паралелограми. Од равенството за паралелограм ($2(a^2+b^2)=d_1^2+d_2^2$ каде a и b се страни на паралелограмот, а d_1 и d_2 негови дијагонали) имаме:

$$2(\overline{SA}^2+\overline{SC}^2)=\overline{SF}^2+\overline{AC}^2 \text{ и}$$

$$2(\overline{SB}^2+\overline{SD}^2)=\overline{SF}^2+\overline{BD}^2.$$



Имајќи во предвид дека $\overline{AC}=\overline{BD}$, како дијагонали на правоаголникот $ABCD$, од горните равенства добиваме

$$\overline{SA}^2+\overline{SC}^2=\overline{SB}^2+\overline{SD}^2.$$

Но сега, за било кој распоред на 1, 3, 5, 7 на местата на $\overline{SA},\overline{SB},\overline{SC},\overline{SD}$, последното равенство не е точно. Навистина

$$1^2+7^2\neq 3^2+5^2, 1^2+5^2\neq 3^2+7^2, 1^2+3^2\neq 5^2+7^2.$$

Значи растојанијата $\overline{SA},\overline{SB},\overline{SC},\overline{SD}$ во ниту еден редослед не можат да бидат 1, 3, 5, 7.

4. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{9b+4c}{11a^2}+\frac{9c+4a}{11b^2}+\frac{9a+4b}{11c^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Решение. Неравенството $(2a-3b)^2(a+b)\geq 0$ за позитивните реални броеви a и b е еквивалентно со неравенството $\frac{4a}{b^2}+\frac{9b}{a^2}\geq\frac{3}{a}+\frac{8}{b}$. Аналогно, за паровите позитивни реални броеви b и c, и a и c се добиваат неравенствата

$$\frac{4b}{c^2}+\frac{9c}{b^2}\geq\frac{3}{b}+\frac{8}{c} \quad \text{и} \quad \frac{4c}{a^2}+\frac{9a}{c^2}\geq\frac{3}{c}+\frac{8}{a}.$$

Ако ги собереме трите неравенства имаме

$$\frac{4a}{b^2}+\frac{9b}{a^2}+\frac{4b}{c^2}+\frac{9c}{b^2}+\frac{4c}{a^2}+\frac{9a}{c^2}\geq\frac{3}{a}+\frac{8}{b}+\frac{3}{b}+\frac{8}{c}+\frac{3}{c}+\frac{8}{a},$$

$$\frac{9b+4c}{a^2}+\frac{9c+4a}{b^2}+\frac{9a+4b}{c^2}\geq\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}.$$

Конечно, последното равенство го делиме со 11 и го добиваме бараното неравенство.

IV година

1. Дали постои неконстантна низа природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, таква што за секој природен број $k \geq 2$ е исполнето равенството $a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$?

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа природни броеви постои. Тогаш за низата од реципрочни вредности $b_n = \frac{1}{a_n}, n \in \mathbf{N}$, имаме

$$b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}.$$

Според тоа $b_2, b_3, ..., b_n, ...$ аритметичка прогресија. Бидејќи $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е неконстантна низа, добиваме дека и $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ е неконстантна аритметичка низа од позитивни реални броеви. Според тоа, постои $d \neq 0$ така што

$$b_n = b_2 + (n-2)d, \ n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

За n доволно големо, имаме $b_n > 1$ или $b_n < 0$ (во зависност од тоа какво е d односно дали е позитивно или дали е негативно).

Од друга страна, бидејќи $a_n \in \mathbf{N}$, добиваме дека

$$0 \leq b_n = \frac{1}{a_n} \leq 1, \ n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$

Од добиената контрадикција, заклучуваме дека таква низа природни броеви не постои.

2. а) За кои природни броеви n, постојат природни броеви x и y за кои важи

$$\text{НЗС}\,(x, y) = n!; \qquad \text{НЗД}\,(x, y) = 2009$$

б) Одреди го бројот на парови (x, y) за кои важи

$$\text{НЗС}\,(x, y) = 41!; \ \text{НЗД}\,(x, y) = 2009; \ x \leq y$$

Решение. а) Од НЗД $(x, y) = 2009$ следува дека $x = 2009a$ и $y = 2009b$, каде што a и b се природни броеви така што НЗД (a, b) =1.

Од НЗС $(x, y) = n!$ следува $2009ab = n!$, односно $7^2 \cdot 41ab = n!$. Од последново следува $n \geq 41$. Условот е и доволен бидејќи ако $n \geq 41$, за $x = 2009$ и $y = n!$ важи НЗС $(x, y) = n!$ и НЗД $(x, y) = 2009$.

б) Нека за броевите x и y важи НЗС $(x, y) = 41!$; НЗД $(x, y) = 2009$; $x \leq y$ Тогаш $x = 2009a$; $y = 2009b$; НЗД (a, b) =1; $a \leq b$ и $2009ab = 41!$, односно $ab = \frac{40!}{7^2}$. Секој прост делител на $\frac{40!}{7^2}$ и е делител на a, не е делител на b и обратно. Бројот $\frac{40!}{7^2}$ има точно 12 прости делители 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 и 37 и секој од нив е делител или на a или на b. Бројот на ваквите парови (a,b) е 2^{12}, меѓутоа само половината го задоволуваат условот $a<b$. Значи постојат точно $2^{11}=2048$ парови (x,y) што го задоволуваат дадениот услов.

3. Даден е произволен триаголник ABC. На страните AB, BC и CA се избрани произволни точки C_1, A_1 и B_1. Нека со P_1, P_2 и P_3 се означени плоштините на триаголниците AC_1B_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 соодветно, а со P е означена плоштината на триаголникот ABC. Докажи дека

$$\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}\le \tfrac{3}{2}\sqrt{P}.$$

Решение. За плоштините на триаголниците AB_1C_1 и ABC важи:

$$P_1=\tfrac{1}{2}\overline{AB_1}\,\overline{AC_1}\sin\angle A \text{ и } P=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AC}\sin\angle A.$$

Според тоа

$$\frac{P_1}{P}=\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}.$$

Слично се добива

$$\frac{P_2}{P}=\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}} \text{ и } \frac{P_3}{P}=\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{P_1}{P}}+\sqrt{\frac{P_2}{P}}+\sqrt{\frac{P_3}{P}}&=\sqrt{\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}}+\sqrt{\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}}+\sqrt{\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}}\\&\le\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}\Big)+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}\Big)+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}\Big)\\&=\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\overline{AB_1}+\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\Big)+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\overline{BC_1}+\overline{AC_1}}{\overline{AB}}\Big)+\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\overline{BA_1}+\overline{CA_1}}{\overline{BC}}\Big)=\tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

4. На републичкиот натпревар по математика, познато е дека секој натпреварувач има не повеќе од тројца познаници (познанството е симетрична релација). Покажи дека е можно натпреварувачите да се распоредат во две простории така да секој од нив на натпреварот има не повеќе од еден познаник во просторијата во која е сместен.

Решение. Да ги распоредиме натпреварувачите во две простории сосема произволно. Со S_1 да го означиме вкупниот број познанства во првата просторија, а со S_2 да го означиме вкупниот број познанства во втората просторија. Нека $S=S_1+S_2$ (доколку два натпреварувачи рапоредени во иста соба се познаници, тоа познанство го броиме еднаш, а не двапати) Тогаш S е ненегативен цел број. Да претпоставиме дека ваквиот распоред не е задоволителен т.е. постои натпреварувач A така да во неговата просторија има барем двајца негови познаници B и C. Го префрламе A во другата просторија; да забележиме дека со ова вредноста на S се намали барем за 1. Во другата просторија A има не повеќе од еден познаник. Според тоа, едниот од броевите S_1 и S_2 се намалил за два а другиот се наголемил за 1, па според тоа S се намалил за 1. Постапката ја продолжуваме се додека моменталниот распоред не е поволен. Бидејќи S е ненегативен цел број, после конечен број вакви префрлања ќе стигнеме до поволен распоред, т.е. распоред во кој натпреварувачите се распоредени во две простории така што секој натпреварувачите има не повеќе од еден познаник во просторијата во која е сместен.