ЈБМО 2006

1. Докажи дека за било кој сложен природен број $n>4$ бројот $2n$ е делител на $1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot(n-1)=(n-1)!$.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $n>4$ е сложен број, тој може да се запише во облик $n=ab$ каде $2\le a\le b$, $2<b$. Од

$$n-1-(a+b)=ab-1-(a+b)=(a-1)(b-1)-2\ge0$$

следува $n-1\ge a+b$. Разгледуваме два случаја.

Ако $a=b>2$, тогаш $2b=b+a\le n-1$. Затоа $2n=2b\cdot b$ е делител на $(2b)!$ кој е делител на $(n-1)!$.

Ако $a<b$, тогаш имаме два подслучаи:

1) $a>2$ и тогаш $2ab$ е делител на $(a+b)!$ кој е делител на $(n-1)!$.

2) $a=2$. Сега, ако $b>4$, тогаш $2n=2\cdot2\cdot b$ е делител на $(b+2)!$ кој е делител на $(n-1)!$.

Ако $b=4$, тогаш $2n=16$ е делител на $(n-1)!=7!$.

Ако $b=3$, тогаш $2n=12$ е делител на $(n-1)!=5!$.

Втор начин. Како во првиот начин добиваме дека $n-1\ge a+b$. Од $b>2$ следува дека 2 е делител на $(b-1)!$, па затоа $2b$ е делител нма $b!$. Понатаму, познато е дека $b!$ е делител на $(a+1)(a+2)...(a+b)=\frac{(a+b)!}{a!}$. Според тоа, бројот $2ab=a(2b)$ е делител на бројот $a!b!$, кој е делител на бројот $a!(a+1)(a+2)...(a+b)=(a+b)!$. Бидејќи $(a+b)!$ е делител на $(n-1)!$ следува дека $2n$ е делител на $(n-1)!$.

Трет начин. За сложените броеви $n\le12$ тврдењето лесно се проверува. Затоа нека $n\ge13$. Нека 2^{α} е највисокиот степен кој е делител на бројот n. Тогаш меѓу броевите од 1 до n сигурно се наоѓаат броевите $2,2^2,2^3,...,2^{\alpha-1},2\cdot3$ и $4\cdot3$. Затоа степенот на бројот 2 во производот $(n-1)!$ е најмалку

$$1+2+3+...+(\alpha-1)+1+2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+3.$$

Лесно се докажува дека $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+3\ge\alpha+1$, т.е. степенот на двојката во производот $(n-1)!$ е најмалку $\alpha+1$. Затоа е доволно да се докаже дека $n\,|\,(n-1)!$.

Ќе разгледаме два случаја.

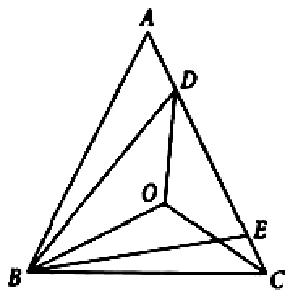
1) Ако постојат природни броеви a и b такви што $n=ab$ и $2\le a<b$, тогаш $b\le\frac{n}{2}$, па затоа $a\ne b$ и $a,b\in\{1,2,...,n-1\}$, од каде добиваме дека $n\,|\,(n-1)!$.
2) Ако такви броеви не постојат, тогаш $n=p^2$, каде $p>2$ е прост број. Но, во овој случај $p^2-1>2p$, па затоа во производот $(n-1)!$ има барем два броја деливи со p и тоа p и $2p$, па затоа $p^2\,|\,(n-1)!$.

Четврт начин. Разгледуваме два случаја.

1) Ако $n=2k$, тогаш $2<k=\frac{n}{2}<n-2$, па затоа k е еден од броевите во производот $(n-1)!$. Од друга страна, во овој производ постојат два парни броја различни од k, и тоа се броевите 2 и $n-2$. Според тоа, $4k\,|\,(n-1)!$, т.е. $2n\,|\,(n-1)!$.
2) Ако $n=2k+1$, тогаш n е производ на два различни непарни броја поголеми од 1, $n=ab$ или $n=p^2$, каде p е непарен прост број. Во првиот случај тврдењето следува од тоа што во множеството $\{1,2,...,n-1\}$ се броевите a и b, а во вториот случај од фактот дека во ова множество се броевите p и $2p$.

2. Нека ABC е рамнокрак триаголник таков што $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\measuredangle BAC<60^\circ$. Нека D и E се внатрешни точки на страната AC такви што $\overline{EB}=\overline{ED}$ и $\measuredangle ABD=\measuredangle CBE$. Симетралите на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BDC$ се сечат во точката O. Определи го $\measuredangle COD$.

Решение. Нека претпоставиме дека точката E припаѓа на отсечката AD. Тогаш $\measuredangle ACB+\measuredangle CBD=\measuredangle BDE=\measuredangle EDB<\measuredangle ABC$, што е противречност. Значи, точката D припаѓа на отсечката AE. Тогаш



$$\begin{aligned}\measuredangle DBC &= \measuredangle DBE+\measuredangle EBC\\ &= \measuredangle EDB+\measuredangle EBC\\ &= \measuredangle BCA+\measuredangle ABD+\measuredangle EBC\\ &= \measuredangle BAC+2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ-2\measuredangle ABC+2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ-2(\measuredangle DBC+\measuredangle ABD)+2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ-2(\measuredangle DBC+\measuredangle EBC)+2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ-2\measuredangle DBC,\end{aligned}$$

т.е. $\measuredangle DBC = 60^\circ$. Овде гледаме зошто беше потребен условот $\measuredangle BAC < 60^\circ$. Тој е и доволен за постоење на саканата конфигурација, бидејќи агол од 60° секогаш може да се впише во агол поголем од 60°.

Точката O е центар на кружницата впишана во триаголник DBC, па затоа

$$\measuredangle COD = 180^\circ - (\measuredangle OCD + \measuredangle ODC) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\measuredangle BDC + \measuredangle DCB)$$
$$= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DBC) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle DBC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

3. За природниот број $n > 1$ ќе велиме дека е совршен ако збирот на сите негови позитивни делител (вклучувајќи ги 1 и n) е еднаков на $2n$. Определи ги сите совршени броеви n такви што и двата броја $n-1$ и $n+1$ се прости.

Решение. Очигледно најмалиот совршен број е 6 и тој се наоѓа меѓу два прости броја: 5 и 7. Ќе докажеме дека нема други совршени броеви со ова својство.

Нека $n-1$ и $n+1$ се прости броеви за некој природен број $n > 6$. Тогаш за некој природен број $k > 1$ важи

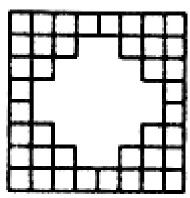
$$n-1 = 6k-1 \text{ и } n+1 = 6k+1.$$

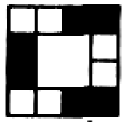
Тогаш $n = 6k$, па затоа броевите $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ се различни делители на бројот n поголеми од 1. Сега од

$$n + \tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{3} + \tfrac{n}{6} + 1 = 2n + 1 > 2n$$

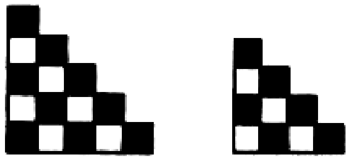
следува дека бројот n не е совршен.

4. Нека $n \geq 2$ е природен број. Од квадратна табла $2n \times 2n$ (составена од единечни 1×1 квадрати) некои од единечните квадрати се отстранети: средните 2од втората редица, средните 4 од третата редица, ..., средните $2n-2$ од $n-$тата редица, средните $2n-2$ од $(n+1)-$та редица,..., средните 4 од $(2n-2)-$та редица и средните е од $(2n-1)-$ та редица, така што е добиена нова фигура (која е прикажана на цртежот десно за $n = 4$. Кој е најголемиот број правоаголници 2×1 (домина), кои може да се поставaт на фигурата без тие да се преклопуваат и така што секој правоаголник покрива два единечни квадрати.





Решение. За $n=2$ фигурата може да се покрие на начинот како што тоа е прикажано на цртежот десно. Според тоа, во овој случај најголемиот баран број е еднаков на 6.
За $n>2$, да ја исечеме фигурата на четири складни делови долж линиите меѓу $n-$тата и $(n+1)-$вата редица и меѓу $n-$тата и $(n+1)-$ватаколона. Овие делови да ги обоиме на шаховски начин, како што е прикажано за долниот лев цртеж за $n=5$ и на долниот десен цртеж за $n=4$.



Секое домино покрива едно бело и едно црно поле. Затоа најголемиот број домина кој може да се смести на еден дел на фигурата не е поголем од бројот на белите полиња (бројот на белите полиња е помал од бројот на црните полиња). На секој од четирите делови (без крајното горно и крајното десно поле), домината може дасе поставaт на следниов начин така што ги покриваат сите бели полиња: поставуваме вертикални домина на двете најдолни редици, тргнувајќи од левиот раб на фигурата, се додека тоа е можно, и хоризонтални домина на преостанатите редици, тргнувајќи од левиот раб се додека тоа е можно.
За $n=2k-1$, каде $k\geq 2$ е природен број, на секој дел има

$$2((k-1)+(k-2)+...+2+1)=k(k-1)$$

бели полиња, па тоа е и најголемиот број домина кои може дасе поставaт. Притоа, според начинот на пшоставување кој го опишавме, граничните полиња во кои фигурите се допираат останаа непокриени. Затоа, со овие 4 домина на граничните полиња во кои фигурите се допираат, најголемиот број домина кој може да се постави е еднаков на

$$4k(k-1)+4=(2k-1)^2+3=n^2+3.$$

За $n=2k$, каде $k\geq 2$ е природен број, имаме

$$(2k-1)+(2k-3)+...+3+1=k^2$$

бели полиња. Слично, како во претходниот случај добиваме дека во овој случај најголемиот број е еднаков на

$$4k^2+4=n^2+4.$$